

УДК 629.76.015

В. С. Асланов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ

Предлагается метод идентификации вращательного движения КА и его параметров по результатам измерений. Метод основывается на использовании в критерии оптимальности оценивания первых интегралов движения или медленно меняющихся функций, зависящих от компонент вектора измерений. На внеатмосферном участке траектории спуска измеряются угловые скорости, а на атмосферном — дополнительно и перегрузки, действующие на осесимметричный аппарат. Разработанный интегральный метод оценивания инвариантен к величине шага измерения и имеет большое быстродействие, за счет использования при решении задачи идентификации интегралов движения или усредненных уравнений движения. Приведены результаты сравнительного численного анализа предлагаемого интегрального метода и метода наименьших квадратов в задачах внеатмосферного и атмосферного движения КА.

1. Вращательное движение КА отличается от поступательного наличием высокочастотных колебательных составляющих. Это обстоятельство существенно затрудняет решение измерительной задачи. При определении только самого вращательного движения используется прием, суть которого заключается в подстановке в правые части дифференциальных уравнений движения измеренных значений угловых скоростей и перегрузок с последующим их интегрированием [1, 2]. Успешная реализация такого подхода возможна при условии, что частота измерений значительно больше частоты собственных колебаний КА, которая в процессе спуска в плотные слои атмосферы может достигать весьма больших значений. При решении общей задачи идентификации методом наименьших квадратов (МНК), когда оцениваются характеристики аппарата и начальные условия его движения, в качестве критерия оптимальности используют квадратичную форму от разности измеренных и расчетных функций. В дальнейшем МНК будем называть также традиционным или общепринятым. МНК обладает высокой точностью, но имеет ряд недостатков, обусловленных особенностью данной задачи. Во-первых, требуется согласование по фазе измеренных и расчетных функций. Во-вторых, шаг измерения Δt должен быть существенно меньше периода колебания измеряемых функций. В-третьих, для реализации МНК необходимы большие затраты машинного времени из-за высокочастотного характера измеряемых функций.

Поставим задачу разработки метода идентификации, лишенного недостатков МНК и близкого к нему по точности. Пусть в моменты времени t_i ($i = \overline{1, N}$) измеряются значения m функций

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_m), \quad (1)$$

которым соответствуют следующие расчетные значения

$$g(\xi) = (g_1, g_2, \dots, g_m),$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l)$ — вектор определяемых параметров. Согласно МНК в качестве оценки вектора состояния ξ принимается следующая:

$$\hat{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \lambda_j (d_{ij} - g_{ij}(\xi))^2, \quad (2)$$

где λ_j — весовые коэффициенты, показывающие относительную значимость измерений функций d .

Предположим, что имеет место совокупность независимых интегралов уравнений движения КА

$$H_k(\xi, d_j) = \text{const}, \quad (k = \widehat{1, p}; j = \widehat{1, m}) \quad (3)$$

или медленно меняющихся функций вдоль решений этих уравнений

$$\frac{dH_k}{dt}(\xi, d_j) = O(\varepsilon), \quad (k = \widehat{1, p}; j = \widehat{1, m}), \quad (4)$$

где ε — малый параметр. Тогда, используя функции (3) или (4), можно записать новое выражение для оценки вектора состояния:

$$\tilde{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^p \rho_k [H_k(\xi, d_{ij}) - H_k(\xi, g_{ij}(\xi))]^2, \quad (5)$$

где ρ_k — весовые коэффициенты, $j = 1, 2, \dots, m$.

Критерий оптимальности оценивания в случае (5) включает в себя только гладкие функции, поэтому шаг измерения Δt может быть достаточно большим (поскольку Δt не связан с периодом колебания измеряемых функций (1)) и согласования фаз измеряемых и расчетных функций не требуется. Затраты машинного времени на решение задачи идентификации при этом существенно сокращаются, так как в случае (3) расчетное значение интеграла H_k вычисляется один раз для всего мерного интервала t_z , а в случае (4) уменьшение объема вычислений достигается за счет применения усредненных уравнений движения. Если количество независимых функций H_k равно числу измерений в каждый момент времени t_i , то есть $p = m$, то точность интегрального метода будет соответствовать точности МНК. Если же это условие не выполняется и $p < m$, то точность интегрального метода будет ниже, чем при традиционном подходе. Однако здесь надо учитывать следующие обстоятельства. Во-первых, есть случаи, когда не может быть обеспечена достаточная для МНК частота измерений. Например, при входе по крутой траектории в плотные слои атмосферы Венеры частота собственных аппаратов, а следовательно и частоты колебаний измеряемых угловых скоростей и перегрузок могут достигать величин, превышающих частоту работы существующих измерительных систем. Тогда МНК, в отличие от интегрального метода, не дает сколько-нибудь достоверных результатов. Во-вторых, при $p < m$ повышение точности оценивания по интегральному методу можно достичь путем увеличения мерного интервала t_z , что нельзя сделать при использовании традиционного метода, так как с ростом t_z увеличивается сдвиг фаз между измеренными и расчетными функциями.

2. Рассмотрим вращательное движение КА вне атмосферы. Будем считать, что гравитационные и аэродинамические моменты, действующие на аппарат, пренебрежимо малы. Тогда движение КА относительно центра масс подчиняется законам движения твердого тела около неподвижной точки в случае Эйлера — Пуансо [3]

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = 0, \quad (6)$$

где $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ — вектор угловой скорости, $K = (K_x, K_y, K_z)$ — вектор кинетического момента.

Кинетический момент можно представить в виде скалярного произведения тензора инерции на вектор угловой скорости

$$K = (J) \cdot \omega.$$

Тогда проекции вектора кинетического момента на оси связанной с телом системы координат $OXYZ$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} K_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, & K_y &= -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z, \\ K_z &= -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Тензор инерции в осях системы $OXYZ$ имеет вид:

$$(J) = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix}.$$

Вектор состояния системы (6), с учетом симметрии тензора инерции относительно собственной главной диагонали, можно записать следующим образом:

$$\xi = (\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}, J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}), \quad (8)$$

где $\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}$ — начальные значения проекций вектора угловой скорости на связанные оси.

Пусть в моменты времени t_i ($i = \overline{1, N}$) измеряются проекции вектора угловой скорости на оси системы $OXYZ$:

$$d = (\omega_x^u, \omega_y^u, \omega_z^u),$$

которым соответствуют расчетные значения

$$g(\xi) = (\omega_x^p, \omega_y^p, \omega_z^p).$$

Тогда в качестве оценки вектора состояния (8) по МНК принимается следующая (см. (3)):

$$\hat{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=x,y,z} \lambda_j [\omega_{ji}^u - \omega_{ji}^p(\xi)]^2. \quad (9)$$

Для случая Эйлера-Пуансо имеют место три интеграла, зависящих от вектора угловой скорости и вектора состояния (8) [4],

$$\frac{1}{2} (\omega_x K_x + \omega_y K_y + \omega_z K_z) = H_1, \quad (10)$$

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = H_2, \quad K_z \gamma + K_y \gamma' + K_x \gamma'' = H_3, \quad (11)$$

где $\gamma, \gamma', \gamma''$ — направляющие косинусы, определяющие положение вектора кинетического момента. Однако воспользоваться для решения задачи оценивания с помощью интегрального метода можно только двумя первыми интегралами — интегралом энергии (10) и модулем вектора кинетического момента (11), поскольку третий интеграл, определяющий направление вектора кинетического момента зависит от направляющих косинусов, которые в данном случае не измеряются. Следовательно число независимых интегралов ($p=2$) меньше количества измерений в точке t_i ($m=3$), поэтому точность интегрального метода ниже, чем точность МНК для рассматриваемой задачи.

Метод идентификации, основанный на использовании в критерии оценивания первых интегралов, предполагает вместо оценки (9) взять оцен-

ку (5)

$$\xi = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^2 \rho_k [H_k(\xi, \omega_{ji}^u) - H_k(\xi, \omega_{ji}^p(\xi))]^2, \quad (j=x, y, z). \quad (12)$$

Входящие в оценку (12) первые интегралы уравнений движения (10) и (11)

$$H_k^p = H_k(\xi, \omega_x^p, \omega_y^p, \omega_z^p), \quad (k=1, 2),$$

сохраняют постоянные значения, поэтому в процессе решения задачи оценивания эти интегралы на всем мерном интервале t_z вычисляются только один раз, в первой точке $i=1$, что существенно снижает затраты машинного времени по сравнению с традиционным методом (см. (9)), когда для получения расчетных значений вектора угловой скорости в точках t_i ($i=1, \dots, N$) необходимо проводить численное интегрирование уравнений движения (6) или использовать их решения в эллиптических функциях Якоби [4].

Рассмотрим пример. Пусть известны точные значения главных моментов инерции:

$$J_x^* = 1,50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad J_y^* = 5,66 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad J_z^* = 5,88 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Определим математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение оценок моментов инерции J_x и J_y с помощью МНК и интегрального метода. Пусть величина мерного интервала принимает следующие значения: 2, 10, 25 и 40 с, а число измерений на мерном интервале постоянно и равно $N=20$. При $t_z=2$ с условие применимости МНК выполняется, то есть в этом случае шаг измерения $\Delta t = t_z/(N-1)$ существенно меньше собственных периодов колебания КА. Для каждого значения мерного интервала t_z K -раз ($K=50$) производится моделирование N измерений с учетом ошибок, распределенных по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением $\sigma_\omega = 0,01 \text{ с}^{-1}$. Для получения оценок (9) и (12) используется градиентный метод и в качестве начальных значений приняты следующие:

$$J_x^0 = 1,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad J_y^0 = 4,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

В табл. 1 приведены математические ожидания и среднеквадратические отклонения оценок моментов инерции J_x и J_y , найденных МНК и интегральным методом, для различных значений мерного интервала. Поскольку количество измерений на мерном интервале неизменно ($N=20$), то с изменением мерного интервала t_z изменяется и шаг измерения $\Delta t = t_z/(N-1)$. На основании данных, представленных в таблице 1, можно сделать следующие выводы. Во-первых, при малом шаге измерения $\Delta t \in (0,105, 0,525)$ с МНК по сравнению с интегральным методом дает более точные результаты — математические ожидания оценок ближе к точным значениям при меньших среднеквадратических отклонениях. Во-вторых, при достижении шага измерения значений, близких периодам колебаний измеряемых угловых скоростей $\Delta t = 25/(N-1) = 1,316$ с, точность МНК существенно ухудшается и при дальнейшем увеличении шага измерения ($\Delta t = 40/(N-1) = 2,105$ с) МНК уже не дает сколь-нибудь достоверных результатов. В-третьих, разработанный интегральный метод независимо от величины шага измерения позволяет получать достаточно точные результаты решения задачи оценивания и этот метод целесообразно использовать в случаях, когда МНК не дает удовлетворительных результатов.

Для данного класса задач, кроме вопроса о точности результата, весьма важен вопрос и о затратах машинного времени, требуемого на получение решения, тем более, что в настоящее время основным методом решения подобных задач является МНК (см., например [3]). Затраты ма-

	МНК				Интегральный метод			
t_z	2	10	25	40	2	10	25	40
M_{J_x}	1,499	1,499	1,459	1,493	1,491	1,494	1,499	1,500
σ_{J_x}	0,011	0,009	0,437	0,571	0,082	0,063	0,092	0,074
M_{J_y}	5,627	5,619	6,447	7,007	5,604	5,604	5,612	5,605
σ_{J_y}	0,027	0,025	1,651	3,183	0,043	0,046	0,041	0,043

шинного времени при использовании МНК возрастают пропорционально увеличению мерного интервала, поскольку основной объем вычислений связан с численным интегрированием уравнений вращательного движения, проведение которого необходимо для получения расчетных значений составляющих вектора угловой скорости. Интегральный метод, напротив, не требует численного интегрирования уравнений движения и объем вычислений не зависит от величины мерного интервала, а определяется только количеством точек измерения, в которых необходимо вычислять первые интегралы уравнений движения (10) и (11). В рассмотренных примерах использование интегрального метода дает на 2...3 порядка выигрыш в затратах машинного времени по сравнению с МНК.

3. Рассмотрим неуправляемое движение осесимметричного аппарата относительно центра масс при спуске в атмосфере. Будем полагать, что движение центра масс известно, тогда уравнения вращательного движения КА в атмосфере можно представить в виде [5]:

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) = -f_z \dot{\alpha} = \varepsilon \Phi_\alpha, \quad \dot{R} = -g_x R + g_y G = \varepsilon \Phi_R, \quad (13)$$

$\dot{G} = -f_y G + hR = \varepsilon \Phi_G$, $F(\alpha) = (G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha) / \sin^3 \alpha - M_z(\alpha) / J_z$. Здесь α — пространственный угол атаки; R , G — с точностью до множителя проекции вектора кинетического момента на ось симметрии тела и на вектор поступательной скорости V ; J_z , J_x — экваториальный и осевой моменты инерции тела;

$$f_z = \frac{Y^\alpha}{mV} - \frac{M_z^{\omega_z}}{J_z}, \quad f_y = \frac{Y}{mV \operatorname{tg} \alpha} - \frac{M_y^{\omega_y}}{J_z} + \frac{M_x^{\omega_y}}{J_z \operatorname{tg} \alpha},$$

$$g_x = -\frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} - \frac{M_x^{\omega_y}}{J_z \operatorname{tg} \alpha}, \quad g_y = \frac{M_x^{\omega_y}}{J_z \sin \alpha}, \quad h = \frac{Y}{mV \sin \alpha} -$$

$$-\left(\frac{M_y^{\omega_y}}{J_z} - \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \right) \cos \alpha + \frac{M_x^{\omega_y} \cos^2 \alpha}{J_z \sin \alpha} - \frac{M_y^{\omega_x} \sin \alpha}{J_x},$$

где $M_z = m_x q S L$ — восстанавливающий момент; $M_i^{\omega_i} m_i^{\omega_i} q S L^2 / V J_z$ — производные проекций аэродинамического момента по угловым скоростям ($i = x, y, z$); q — скоростной напор; S , L — характерные площадь и размер КА; Y — подъемная сила, $Y^\alpha = \frac{\partial Y}{\partial \alpha}$; ε — малый параметр, Φ_α , Φ_R , Φ_G —

периодические функции угла атаки.

Коэффициенты восстанавливающего момента и подъемной силы являются нечетными функциями угла атаки [5] и поэтому могут быть аппроксимированы нечетными рядами Фурье

$$m_z = \sum_{i=1}^n a_i \sin i\alpha, \quad C_y = \sum_{i=1}^n b_i \sin i\alpha.$$

Тогда для системы (13) вектор состояния приобретает вид

$$\xi = (\alpha_0, \dot{\alpha}_0, R_0, G_0, a_i, b_i, m_j^{\bar{\omega}j}, J_x, J_z, S, L), \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = x, y, z). \quad (14)$$

Пусть в моменты времени $(t_1, t_2, \dots, t_N)$ измеряются проекции векторов угловой скорости и перегрузки на оси главной связанной системы координат

$$d = (\omega_x, \omega_y, \omega_z, n_x, n_y, n_z). \quad (15)$$

Для решения задачи оценивания вектора состояния (14) разработанным интегральным методом необходимо найти совокупность независимых функций переменных (15), удовлетворяющих условиям (3) или (4). В невозмущенном движении ($\varepsilon=0$) система уравнений (13) описывает движение твердого тела около неподвижной точки в случае Лагранжа, для которых имеют место три интеграла [4]

$$R = \text{const}, \quad (16)$$

$$G = \text{const}, \quad (17)$$

$$\frac{\alpha^2}{2} + W(\alpha) = E, \quad (18)$$

где

$$W(\alpha) = \int F(\alpha) d\alpha. \quad (19)$$

Из системы (13) следует, что для осесимметричного тела, спускающего в атмосфере, интегралы (16) и (17) являются медленно меняющимися функциями, то есть удовлетворяют условию (4). Покажем, что интеграл энергии (18) также в силу уравнений (13) медленно меняется во времени. Перепишем исходную систему уравнений движения (13) в виде

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) = \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z), \quad \dot{z} = \varepsilon \Phi_z(\alpha, \dot{\alpha}, z), \quad (20)$$

где $z = (R, G, q)$ — вектор медленно меняющихся функций. Продифференцируем по времени интеграл энергии (18) в силу уравнений (20)

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\alpha}(\ddot{\alpha} + F) + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial z} \Phi_z = \varepsilon \left(\dot{\alpha} \Phi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial z} \Phi_z \right). \quad (21)$$

Соотношение (21) показывает, что производная по времени интеграла энергии (18) имеет порядок малости ε . Отсюда ясно, что для рассматриваемого случая существует совокупность трех независимых медленно меняющихся функций, удовлетворяющих условию (4)

$$H_k = (R, G, E), \quad (k=1, 2, 3). \quad (22)$$

Поскольку первое уравнение исходной системы (13) не зависит явным образом от времени, то без нарушения общности можно принять, что в начальный момент времени производная $\left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=t_0} = 0$, а угол атаки равен

амплитудному значению $\alpha = \alpha_{m_0}$. Тогда поведение системы (13) определяется тремя начальными условиями α_{m_0}, R_0, G_0 при одном нулевом ($\dot{\alpha}_0 = 0$), причем функции α_m, R, G медленно меняются во времени. Следовательно, число независимых медленно меняющихся функций для системы (13) равно трем. Заметим, что амплитудное значение угла атаки α_m является корнем следующего уравнения

$$W(\alpha_m) - E = 0$$

и поэтому интеграл энергии в совокупности (22) может быть заменен на амплитуду угла атаки или иную медленную переменную, например, ин-

теграл действия, для которого также имеет место уравнение вида (4) (см. [6]).

Для системы координат, принятой в [7], между параметрами вращательного движения α , R , G и измерениями (15) легко установить связь

$$\sin \alpha = \frac{n_y}{n}, \quad \cos \alpha = \frac{n_x}{n}, \quad \dot{\alpha} = \frac{\omega_y n_z - \omega_z n_y}{n_y}, \quad (23)$$

$$R = \bar{J}_x \omega_x, \quad G = (\bar{J}_x \omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z) / n, \quad (24)$$

где $n = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$ — полная перегрузка, $n_y = (n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$ — экваториальная перегрузка.

Покажем, что интеграл энергии (18), также как R и G может быть выражен через компоненты вектора измерений (15). Для этого выражение (19) перепишем в виде

$$W = \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} + \frac{qSL}{J_z} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \cos i\alpha. \quad (25)$$

Если ограничиться в тригонометрическом полиноме разложения коэффициента восстанавливающего момента первыми двумя членами (хотя в принципе можно сохранить любое число членов) и подставить формулы (23) — (25) в выражение (18), то получим интеграл энергии как функцию параметров измерений (15)

$$E = \frac{1}{2J_z} \left[J_x \omega_x^2 + J_z \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 + 2qSL \left(a_1 + a_2 \frac{n_x}{n} \right) \frac{n_x}{n} \right]. \quad (26)$$

Это выражение с точностью до множителя определяет собой полную энергию вращательного движения осесимметричного аппарата в атмосфере. Таким образом, найдена совокупность трех медленно меняющихся функций (22), зависящих от измерений (15).

Запишем выражения для оценок вектора состояния (14) по МНК (2)

$$\hat{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=x,y,z} [\lambda_{\omega_j} (\omega_{ji}^u - \omega_{ji}^p)^2 + \lambda_{n_j} (n_{ji}^u - n_{ji}^p)^2] \quad (27)$$

и по интегральному методу (5)

$$\tilde{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N [\rho_R (R_i^u - R_i^p)^2 + \rho_G (G_i^u - G_i^p)^2 + \rho_E (E_i^u - E_i^p)^2]. \quad (28)$$

Особенностью движения КА относительно центра масс является изменение собственной частоты колебаний в процессе спуска в атмосфере. Частота колебания аппарата, а следовательно и частоты колебания измеряемых угловых скоростей и перегрузок (15), изменяется пропорционально корню квадратному от скоростного напора. И если в начале траектории частоты колебаний невелики, то на участке траектории в окрестности точки, соответствующей максимальному скоростному напору, частоты колебаний могут достигать очень больших величин. Чем круче траектория спуска, меньше баллистический коэффициент и больше запас статической устойчивости, тем больше частоты изменения измеряемых параметров (15). В таких случаях получить оценку вектора состояния по МНК (27) весьма трудно, поскольку частота измерения должна приблизительно на порядок превышать частоту колебания самого КА. Такого ограничения не существует для интегрального метода, однако его точность ниже, чем МНК, так как число независимых медленно меняющихся функций (22) в два раза меньше количества измерений в каждой точке t_i ($i=1, N$) — три против шести.

Необходимо рассмотреть вопрос о быстродействии разработанного метода. Исходная система уравнений движения (13) в своем решении содержит высокочастотные составляющие, что затрудняет ее численное интегрирование, а следовательно и получение расчетных значений угловых скоростей, перегрузок и медленно меняющихся функций (24) и (26). Вместе с тем высокочастотный характер движения позволяет применить к системе (13) процедуру усреднения и заменить ее на усредненную систему вида [8]:

$$\dot{R}=\varepsilon \bar{\Phi}_R(z), \quad \dot{G}=\varepsilon \bar{\Phi}_G(z), \quad \dot{E}=\varepsilon \bar{\Phi}_E(z), \quad \dot{q}=\varepsilon \bar{\Phi}_q(z), \quad (29)$$

где

$$\bar{\Phi}_z = \frac{1}{T} \left[\int_{\alpha_{\max}}^{\alpha_{\min}} \Phi_z(\alpha, -\dot{\alpha}) d\alpha + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \Phi_z(\alpha, \dot{\alpha}) d\alpha \right],$$

$$T = 2 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} [2(E - W(\alpha))]^{1/2} d\alpha -$$

период колебания угла атаки, $z=(R, G, E, q)$ — вектор медленно меняющихся функций, $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ — минимальный и максимальный угол атаки.

Медленно меняющиеся функции (22), входящие в выражение (28), имеют малые порядка ε колебательные составляющие. Чтобы исключить согласование по фазе измеренных и расчетных значений этих функций, а также осреднить ошибки измерения и сократить затраты машинного времени на получение расчетных значений, целесообразно в оценке (28) использовать усредненные значения функций (22), полученные в результате численного интегрирования системы (29). Окончательно оценку вектора состояния (14) по интегральному методу запишем следующим образом:

$$\tilde{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N [\rho_R(R_i^u - \bar{R}_i^p)^2 + \rho_G(G_i^u - \bar{G}_i^p)^2 + \rho_E(E_i^u - \bar{E}_i^p)^2]. \quad (30)$$

С целью подтверждения преимуществ разработанного метода для задач идентификации вращательного движения КА при спуске в атмосфере рассмотрим два примера — первый — в детерминированной постановке при «идеальных» измерениях, второй — в стохастической постановке при измерениях с «шумами».

Пример 1. Пусть КА сферической формы имеет следующие параметры:

$$m_z^a = a_1 = -0,06, \quad J_x/J_z = 0,6, \quad \sigma_x = \frac{C_x S}{2m} = 0,001 \text{ м}^2 \cdot \text{кг}^{-1}.$$

В качестве начальных условий движения приняты $\alpha_0 = 90^\circ$, $\dot{\alpha}_0 = 0$, $R_0 = 2 \text{ с}^{-1}$, $G_0 = 1 \text{ с}^{-1}$, $\theta_0 = -10^\circ$, $V_0 = 7000 \text{ м/с}$, $H_0 = 60000 \text{ м}$, где θ , V , H — соответственно, угол наклона траектории, скорость и высота полета.

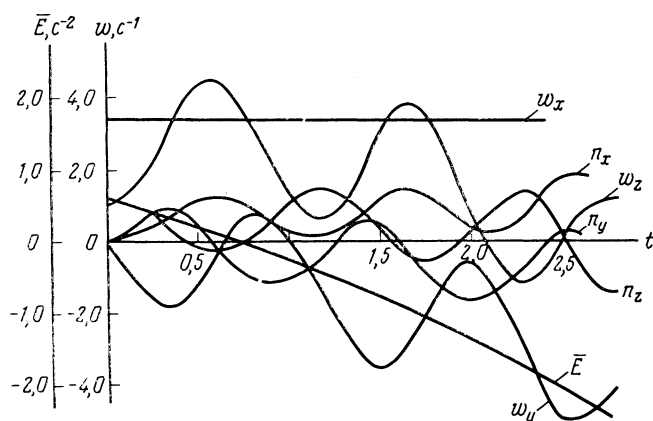
При указанных начальных условиях проводилось моделирование измерений (15) путем численного интегрирования исходных уравнений движения (13). В точках t_i ($i=1, \dots, N$) вычислялись компоненты вектора измерений (15) по следующим формулам

$$\omega_x = \psi \cos \alpha + \dot{\varphi}, \quad \omega_y = \psi \sin \alpha \sin \varphi + \dot{\alpha} \cos \varphi, \quad \omega_z = \psi \sin \alpha \cos \varphi - \dot{\alpha} \sin \varphi,$$

$$n_x = C_\tau q S / mg, \quad n_y = C_N q S \sin \varphi / mg, \quad n_z = C_N q S \cos \varphi / mg,$$

где φ , ψ — углы собственного вращения и прецессии; C_τ , C_N — коэффициенты тангенциальной и нормальной аэродинамических сил;

$$\dot{\psi} = (G - R \cos \alpha) / \sin^2 \alpha, \quad \dot{\varphi} = R / \bar{J}_x - \psi \cos \alpha.$$



На рисунке показано изменение во времени измеряемых функций (15) и среднего значения интеграла энергии (26), причем функции R и G при выбранных параметрах КА оставались постоянными, равными, соответственно, 2,0 и 1,0. Производилось оценивание производной восстанавливающего момента по углу атаки m_z^α на мерном интервале $t_z=20$ с, на котором период собственных колебаний КА приблизительно равнялся 1 с. Нахождение оценки (30) по интегральному методу осуществлялось методом Хука Дживса [9]. В качестве начального приближения выбрано значение $m_{z0}^\alpha=-0,045$. При изменении шага измерения Δt от 0,1 с до 5 с абсолютная погрешность оценивания изменялась от 0,001 до 0,004.

Пример 2. Проводилось сравнение МНК и интегрального метода при оценивании коэффициента m_z^α , определяющего статическую устойчивость КА. Моделирование измерений (15) производилось с учетом ошибок измерений, распределенных по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением, равным, соответственно, для угловых скоростей и перегрузок $\sigma_\omega=0,01$ с⁻¹ и $\sigma_n=0,01$. Точное значение оцениваемого параметра равнялось $m_z^\alpha=-0,06$, а начальное приближение — $m_{z0}^\alpha=-0,1$. Количество измерений на мерном интервале постоянно и равно $N=20$, изменялось только значение мерного интервала t_z , а следовательно и шага измерения $\Delta t=t_z/(N-1)$. На мерном интервале проводилось K -раз моделирование измерений ($K=50$), при этом использовались различные совокупности псевдослучайных чисел, необходимых для формирования ошибок измерений. Период колебания измеряемых функций на мерном интервале $t_z=16$ с изменялся от 0,8 с до 0,3 с. Рассматривались интервалы измерения из $t_z \in [0,2, 16]$ с, которым соответствовали шаги измерения $\Delta t \in [0,011, 0,842]$ с. В табл. 2 приведены математические ожидания, среднеквадратические отклонения оценок, полученных по МНК и по интегральному методу, а также коэффициенты корреляции между этими оценками. При t_z равном 8 с и 16 с оценки по МНК

Таблица 2

t_z , с	0,2	2,0	4,0	8,0	16,0
Δt , с	0,011	0,105	0,211	0,421	0,842
$M_{\hat{m}_z^\alpha}$	-0,0599	-0,0599	-0,0779	—	—
$\sigma_{\hat{m}_z^\alpha}$	0,0006	0,0001	0,0306	—	—
$M_{\sim \hat{m}_z^\alpha}$	-0,0626	-0,0604	-0,0604	-0,0604	-0,0604
$\sigma_{\sim \hat{m}_z^\alpha}$	0,0033	0,0011	0,0011	0,0010	0,0012
$K_{\hat{m}_z^\alpha \sim \hat{m}_z^\alpha}$	0,5264	0,6579	0,0696	—	—

расходятся и поэтому не приведены в таблице. Как и при внеатмосферном движении КА МНК дает более точные оценки по сравнению с интегральным методом в случаях, когда шаг измерения существенно меньше периода колебания измеряемых функций ($\Delta t=0,011$ с и $\Delta t=0,105$ с). Точность оценивания по интегральному методу практически не зависит от величины шага измерений, исключение составляет только случай $\Delta t=0,011$ с. За счет использования усредненных уравнений (29) при реализации интегрального метода объем вычислений в 30...50 раз сокращается по сравнению с МНК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брандин В. Н., Васильев А. А., Куницкий А. А. Экспериментальная баллистика космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1984.
2. Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976.
3. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953.
4. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972.
5. Ярошевский В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978.
6. Аслапов В. С. О вращательном движении баллистического осесимметричного аппарата при спуске в атмосфере // Космич. исслед. 1976. Т. 14. № 4. С. 491–497.
7. Аслапов В. С. Определение амплитуды пространственных колебаний баллистического аппарата с малой асимметрией при спуске в атмосфере // Космич. исслед. 1980. Т. 18. № 2. С. 178–184.
8. Аслапов В. С., Тимбай И. А., Бойко В. В. Пространственные колебания осесимметричного аппарата на произвольных углах атаки при снижении в атмосфере планеты // Космич. исслед. 1981. Т. 19. № 5. С. 680–687.
9. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир. 1975.

Поступила в редакцию
17.IX.1987