

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ ПРИ СПУСКЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРУ

© 1997 г. В. С. Асланов, С. В. Мясников

Самарский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 09.09.96 г.

В нелинейной постановке рассматривается неуправляемое движение относительно центра масс асимметричного космического аппарата при спуске в атмосферу планеты. На основании частично усредненной системы проводится исследование устойчивости нелинейных резонансов и устойчивости движения системы по Ляпунову в окрестности стационарной точки под действием малых возмущений. Получены необходимые и достаточные условия двух рассматриваемых видов устойчивости. На основе численного примера показано, что из устойчивости резонанса не следует устойчивость движения в окрестности стационарной точки и наоборот.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Изучению движения вокруг центра масс КА при неуправляемом спуске в атмосферу посвящено большое количество работ. Исследования проводились при введении тех или иных допущений, как правило, использовалась процедура линеаризации уравнений движения или вводилось допущение о квазистатическом характере движения. Наиболее сложные вопросы в данной проблеме относятся к изучению резонансных явлений. Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости резонансов в нелинейной постановке, рассматривается не только устойчивость самого резонанса как явления (этому посвящена статья [1]), но и анализируется устойчивость стационарной точки типа центр в области устойчивых резонансов с помощью прямого метода Ляпунова с видоизменением Хапаева при действии малых возмущений [2].

Воспользуемся нелинейными уравнениями, описывающими вращательное движение КА с точностью до величин порядка квадрата малой асимметрии, приведенными в работе [3]

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + F(\alpha, \mathbf{z}) &= \varepsilon \Phi_{\alpha}(\alpha, \varphi, \mathbf{z}), \\ \ddot{\varphi} &= \Phi_{\varphi}(\alpha, \mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{z}} &= \varepsilon \Phi_{\mathbf{z}}(\alpha, \varphi, \mathbf{z}),\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}F(\alpha, \mathbf{z}) &= (G - R \cos \alpha)(R - \\ &- G \cos \alpha) / \sin^3 \alpha - M_{\alpha}(\alpha, \mathbf{z}), \\ \Phi_{\alpha}(\alpha, \varphi, \mathbf{z}) &= R / \bar{J}_x - (G - R \cos \alpha) \cos \alpha / \sin^2 \alpha, \\ \varepsilon \Phi_{\varphi} &= D_0^{\varphi}(\alpha, \mathbf{z}) + D_1^{\varphi}(\alpha, \mathbf{z}) \sin \varphi + D_2^{\varphi}(\alpha, \mathbf{z}) \cos \varphi + \\ &+ D_3^{\varphi}(\alpha, \mathbf{z}) \sin 2\varphi + D_4^{\varphi}(\alpha, \mathbf{z}) \cos 2\varphi, \quad \mathbf{v} = \alpha, \mathbf{z};\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь α – пространственный угол атаки, φ – угол собственного вращения, $R = J_x \omega_x / J_y$, $G = R \cos \alpha + (-\omega_y \cos \varphi + \omega_z \sin \varphi) \sin \alpha$ – с точностью до множителя проекции вектора кинетического момента соответственно на продольную ось аппарата и на направление скорости $\bar{\mathbf{V}}$, ω_x , ω_y , ω_z – проекции угловой скорости на связанные оси, $\mathbf{z} = (R, G, \dots)$ – вектор медленно меняющихся переменных, M_{α} – с точностью до множителя восстанавливающий аэродинамический момент, J_x , J_y , J_z – центральные моменты инерции, $\bar{J}_x = J_x / J_y$.

Система (1) преобразуется к стандартной двухчастотной форме [3]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \omega(\mathbf{z}), \quad \dot{\bar{\varphi}} = \lambda(\mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{z}} &= \varepsilon \Phi_{\mathbf{z}}(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}(y, \mathbf{z}), \mathbf{z}).\end{aligned}\quad (3)$$

где $\mathbf{z} = (x, R, G, \dots)$ – расширенный вектор медленно меняющихся переменных; x, y – амплитуда и фаза колебаний угла атаки; $\omega(\mathbf{z})$ – частота колебаний пространственного угла атаки; $\tilde{\varphi}(y, \mathbf{z})$ – некоторая известная функция, $\lambda(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{\varphi}(y, \mathbf{z}) dy$ – средняя частота собственного вращения.

Резонанс в двухчастотной системе (3) возможен, когда целочисленная комбинация частоты колебания пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения близки к нулю

$$m\omega(\mathbf{z}) - n\lambda(\mathbf{z}) = 0(\varepsilon), \quad (4)$$

где m, n – целые взаимно простые числа.

Для анализа движения КА в окрестности резонанса (4) удобно использовать систему маятникового типа [3], которая получается из системы (3)

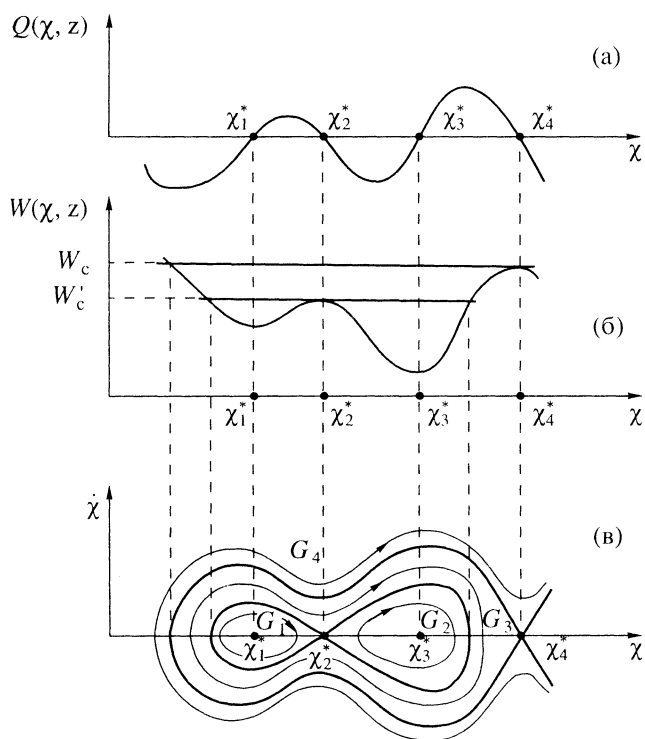


Рис. 1

после замены $\chi = my/n - \bar{\varphi}$ и усреднения по быстрой переменной y

$$\begin{aligned} d^2\chi/d\tau^2 + Q(\chi, \mathbf{z}) &= 0, \\ d\mathbf{z}/d\tau &= \mu f_z(\chi, \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mu = \sqrt{\epsilon}$, $\tau = \mu t$ – “медленное” время,

$f_z(\mathbf{c}, \mathbf{z}) = \left\langle \Phi_z \left(y, \frac{m}{n}y - \chi + \bar{\varphi}(y, \mathbf{z}), \mathbf{z} \right) \right\rangle$ – средние по y .

$$\begin{aligned} Q(\chi, \mathbf{z}) &= -\left(\frac{m}{n} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{z}} \right) f_z(\chi, \mathbf{z}) = \\ &= Q_0(\mathbf{z}) + Q_1(\mathbf{z}) \sin \chi + \\ &+ Q_2(\mathbf{z}) \cos \chi + Q_3(\mathbf{z}) \sin 2\chi + Q_4(\mathbf{z}) \cos 2\chi. \end{aligned} \quad (6)$$

Характер невозмущенного движения ($\mu = 0$) системы (5) полностью зависит от функции (6), которая в свою очередь определяется видом соотношений (2) в исходной системе уравнений движения (1). Фазовый портрет системы с малыми возмущениями (5) состоит из нескольких областей колебательного и вращательного движений, разделенных сепаратрисой. В силу малых возмущений, действующих на систему, может происходить переход из одной области в другую, а также эволюция самих областей.

При отсутствии возмущений ($\mu = 0$) система (5) имеет вид

$$d^2\chi/d\tau^2 + Q(\chi) = 0 \quad (7)$$

и допускает первый интеграл – интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{d\tau} \right)^2 + W(\chi) = E, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} W(\chi, \mathbf{z}) &= \int Q(\chi, \mathbf{z}) d\chi = Q_0\chi - Q_1 \cos \chi + \\ &+ Q_2 \sin \chi - 0.5 Q_3 \cos 2\chi + 0.5 Q_4 \sin 2\chi. \end{aligned} \quad (9)$$

Стационарные положения (точки) этой системы (7) являются корнями уравнения

$$Q(\chi_0, \mathbf{z}) = 0. \quad (10)$$

Действительные корни этого выражения существуют, если выполняется условие

$$\max_{\chi} Q \min_{\chi} Q \leq 0 \quad (11)$$

Соотношение (11) является условием существования стационарных точек.

В силу вида функции Q в общем случае может существовать четыре корня $\chi = \chi_i^*$ ($i = 1, \dots, 4$), удовлетворяющих уравнению (10). Устойчивое положение равновесия определяется условием

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial \chi} \right|_{\chi = \chi_i^*} > 0. \quad (12)$$

Выполнение неравенства (12) означает существование на фазовой плоскости устойчивой стационарной точки типа центр. В случае, когда все коэффициенты $Q_i(\mathbf{z})$ в формуле (6) отличны от нуля, потенциальная энергия (9) может иметь вид, показанный на рис. 1. Внешняя сепаратриса отделяет область вращательных движений G_4 от “большой” колебательной области G_3 , которая охватывает две внутренние “малые” области колебательных движений G_1 и G_2 . Точки χ_1^* и χ_3^* – точки типа центр, χ_2^* и χ_4^* – точки типа седло. При отсутствии у КА инерционной асимметрии ($J_x = J_y$) обращаются в нуль два последних слагаемых в выражении (2), а следовательно и в формуле (6) $Q_3 = Q_4 = 0$. В этом случае одна из областей колебательного движения (G_1 или G_2), а также стационарная седловая точка χ_2^* вырождаются (см. рис. 2).

В силу действия на систему (5) возмущений ($\mu \neq 0$) на фазовом портрете изменяются фазовые траектории, а также происходит деформация се-

паратрис. Возможны три характерных типа движения.

1. Прохождение через резонанс, которому отвечает изменение направления вращения маятниковой системы.

2. Захват в резонанс, когда возможен колебательный режим движения маятника. Этот режим соответствует траекториям, находящимися внутри сепаратрисы и постоянно остающимися вблизи резонанса.

3. Движение в малой окрестности стационарной точки типа центр внутри сепаратрисы.

Фазовые траектории, соответствующие этим типам движения, показаны на рис. 3. На рисунке тонкой штриховой линией изображена фазовая траектория, соответствующая проходу через резонанс. Фазовая траектория, соответствующая захвату маятника в резонанс, показана толстой сплошной линией. Толстой штриховой линией изображена фазовая траектория системы, совершающей движение в малой окрестности стационарной точки типа центр.

Рассмотренным типам движения, внутри колебательной области, можно поставить в соответствие два вида устойчивости.

Первый – это устойчивость маятника в колебательной области (устойчивость резонанса).

Второй – устойчивость маятниковой системы в малой окрестности стационарной точки типа центр (устойчивость по Ляпунову).

Поскольку невозмущенное движение ($\mu = 0$) маятниковой системы (5) устойчиво не асимптотически, то устойчивость движения при отсутствии возмущений не означает устойчивости полученного решения при действующих малых возмущениях. С другой стороны, устойчивость резонанса, то есть нахождение фазовой точки в колебательной области фазовой плоскости при действии любых малых возмущений, не означает устойчивости движения по Ляпунову в окрестности стационарной точки типа центр, так как фазовая точка в силу действующих малых возмущений может покинуть малую окрестность стационарной точки при этом оставаться в течение длительного времени в колебательной области, ограниченной сепаратрисой.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕЗОНАНСА

В практических задачах, связанных со спуском КА в атмосферу, как правило, исследуют явления прохода через резонанс или захвата в резонанс и его устойчивости. Основу анализа устойчивости движения фазовой точки в колебательной области, когда при любых возмущениях фазовая точка всегда остается внутри этой области, составляет весьма простое положение: величина полной энергии системы E , на любом интервале времени,

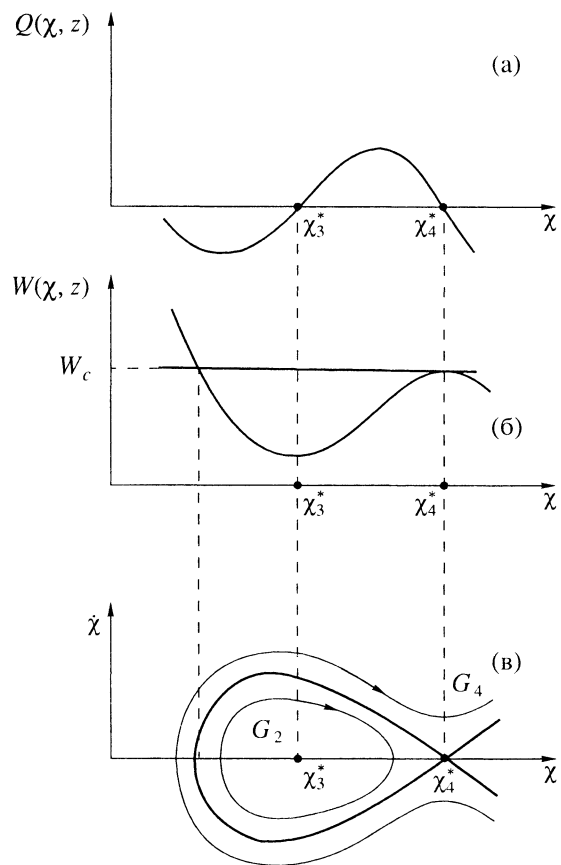


Рис. 2

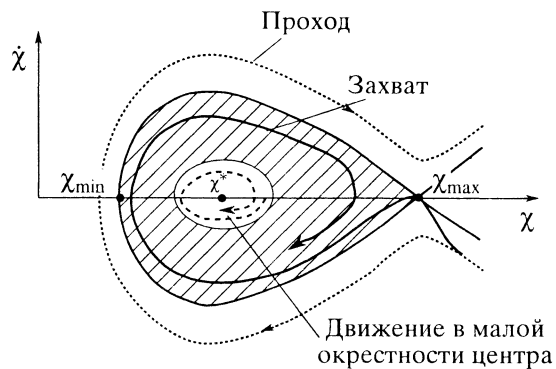


Рис. 3

не должна превышать значения потенциальной энергии W_c , вычисленной в седловой точке (см. рис. 3) [1].

Для реализации устойчивого резонансного движения необходимо, чтобы на фазовой плоскости существовали колебательная область, ограниченная сепаратрисой, то есть, чтобы выполнялось условие (11); и достаточно, чтобы производная по времени полной энергии системы $\dot{E}$ была меньше, чем производная по времени потенци-

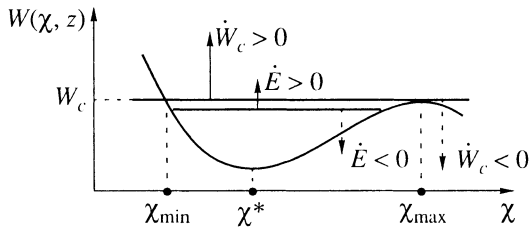


Рис. 4

альной энергии $\dot{W}_c$, вычисленной в седловой точке (см. рис. 4). В этом случае колебательная область будет расширяться быстрее, чем фазовая траектория приближаться к границе области к сепаратрисе. Производная $\dot{E}$ показывает эволюцию фазовой траектории маятниковой системы (5), а производная $\dot{W}_c$ – эволюцию сепаратрисы под действием малых возмущений ($\mu \neq 0$). Поскольку речь идет о колебательном движении системы, то об указанных производных можно говорить только в смысле их средних на периоде колебаний значений. Очевидно, что соответствующие производные следует усреднять на сепаратрису, ограничивающей область, устойчивость движения в которой исследуется. Достаточное условие устойчивости резонанса можно записать в виде [1]

$$\langle \dot{W}_c \rangle - \langle \dot{E} \rangle > 0, \quad (13)$$

$$\text{где } \langle \dot{W}_c \rangle = \oint_l \frac{\partial W_c(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} f_z(\chi, \mathbf{z}) d\tau, \quad \langle \dot{E} \rangle = \oint_l \frac{\partial E(q, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} f_z(\chi, \mathbf{z}) d\tau.$$

В работе [4] для анализа процесса перехода фазовой траектории через сепаратрису введена функция Θ , которую для системы (5) можно записать в виде

$$\Theta(\mathbf{z}) = - \oint_l \frac{\partial E_c(\chi, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} f_z(\chi, \mathbf{z}) d\tau, \quad (14)$$

где $E_c = E - W_c$ – полная энергия системы, обращающаяся в нуль на сепаратрисе. Физический смысл функции $\Theta(\mathbf{z})$ – скорость приближения площади, ометаемой фазовой траекторией к площади сепаратрисы.

Условие (13) с учетом выражения (14) можно переписать следующим образом $\Theta > 0$.

А.И. Нейштадтом показано, что несобственный интеграл (14) сходится. Заметим, что $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{z}}$, тогда имеем

$$\Theta(\mathbf{z}) = \oint_l \left(\frac{\partial W_c}{\partial \mathbf{z}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{z}} \right) f_z(\chi, \mathbf{z}) d\tau.$$

Подставляя в это выражение соотношение для потенциальной энергии (9), получим окончательную формулу для Θ в виде

$$\Theta = \oint_l [\vartheta_0(\chi_c - \chi) + \vartheta_1(\cos \chi_c - \cos \chi) +$$

$$+ \vartheta_2(\sin \chi_c - \sin \chi) + \vartheta_3 \sin(\chi_c + \chi) \sin(\chi_c - \chi) +$$

$$+ \vartheta_4 \cos(\chi_c + \chi) \sin(\chi_c - \chi)] f_z(\chi, \mathbf{z}) d\tau,$$

$$\text{где } \vartheta_0 = \frac{\partial Q_0}{\partial \mathbf{z}}, \quad \vartheta_1 = -\frac{\partial Q_1}{\partial \mathbf{z}}, \quad \vartheta_2 = \frac{\partial Q_2}{\partial \mathbf{z}}, \quad \vartheta_3 = \frac{\partial Q_3}{\partial \mathbf{z}}, \quad \vartheta_4 = \frac{\partial Q_4}{\partial \mathbf{z}}.$$

При выводе этой формулы не накладывались какие-либо ограничения на характер движения КА в околорезонансной области. Это соотношение справедливо для всех видов резонансов (4).

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Преобразуем систему (5) к виду, удобному для проведения исследования устойчивости по Ляпунову, при этом воспользуемся процедурой, предложенной в [5]. Сделаем замену переменных в окрестности устойчивой стационарной точки: $\chi = \chi^* + \Delta\chi$, $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ ($\rho = \dot{\chi}$, $\rho_0 = 0$) и разложим функцию $Q(\chi)$ в точке $\chi = \chi^*$ в ряд Тейлора. В результате получим

$$\frac{d\Delta\chi}{d\tau} = \Delta\rho + \mu G, \quad \frac{d\Delta\rho}{d\tau} = -\Omega^2 \Delta\chi + \mu P, \quad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = \mu f_z,$$

где $\Omega^2 = \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2}_{\chi=\chi^*} > 0$ – в силу условия (12); $G = \left(\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{z}} / \frac{\partial Q}{\partial \chi} \right)_{\chi=\chi^*} f_z(\chi^*, \mathbf{z})$, а P – функция, определяющая нелинейные члены разложения по переменной $\Delta\chi$.

Для построения функции Ляпунова в квазилинейной системе (15) удобно перейти к переменным амплитуда–фаза

$$\Delta\chi = A \cos \psi, \quad \Delta\rho = -A\Omega \sin \psi, \quad (16)$$

где A и ψ – амплитуда и фаза колебаний переменной $\Delta\chi$ относительно устойчивой стационарной

точки $\chi = \chi^*$. Тогда система (15) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\tau} &= \Omega - \frac{\Omega'}{\Omega} \sin \psi \cos \psi + \mu \left(-\frac{P}{A\Omega} \cos \psi - \frac{G}{A} \sin \psi \right), \\ \frac{dA}{d\tau} &= -A \frac{\Omega'}{\Omega} \sin^2 \psi + \mu \left(-\frac{P}{\Omega} \sin \psi + G \cos \psi \right), \\ \frac{dz}{d\tau} &= \mu f_z,\end{aligned}\quad (17)$$

где $\Omega' = \frac{d\Omega}{d\tau}$ – имеет порядок малости μ .

В качестве функции Ляпунова выбирается квадратичная форма амплитуды колебаний, которая в силу соотношений (16) определяется формулой

$$V = A^2 = (\Delta\chi)^2 + \frac{(\Delta\rho)^2}{\Omega^2}. \quad (18)$$

Эта функция является положительно-определенной и допускает по переменным $\Delta\chi$ и $\Delta\rho$ бесконечно-малый высший предел и удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.1 из [2], согласно которой для устойчивости движения системы (17) в окрестности точки: $\Delta\chi = 0$, $\Delta\rho = 0$ при действии возмущений достаточно потребовать выполнения следующего условия

$$A \left\langle \frac{dA}{d\tau} \right\rangle < 0, \quad (19)$$

где $\langle \cdot \rangle$ – оператор усреднения по ψ .

Разложение функций P и G в ряд Тейлора в окрестности точки: $\Delta\chi = 0$ и усреднение второго уравнения системы (16) по переменной ψ позволяет переписать достаточное условие устойчивости (19) с точностью до членов порядка малости μ^2 в виде

$$\frac{\Omega'}{\Omega} > 0. \quad (20)$$

Достаточное условие устойчивости (20) зависит от частоты

$$\Omega^2 = \frac{\partial Q}{\partial \chi_{\chi=\chi^*}}. \quad (21)$$

Продифференцируем это выражение по времени τ

$$2\Omega \frac{d\Omega}{d\tau} = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial z} \frac{dz}{d\tau} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{d\chi^*}{d\tau} \right)_{\chi=\chi^*}. \quad (22)$$

Для отыскания производной $d\chi^*/d\tau$ следует продифференцировать уравнение (10) по времени τ в

силу возмущенной системы (5)

$$\frac{d\chi^*}{d\tau} = -\mu \left(\frac{\partial Q}{\partial z} / \frac{\partial Q}{\partial \chi} \right)_{\chi=\chi^*} f_z(\chi^*, z).$$

Подставим это выражение в соотношение (22), а после чего формулу (22) – в (20). Тогда в результате получим окончательную форму достаточного условия устойчивости движения возмущенной системы в окрестности стационарной точки $\chi = \chi^*$ в следующем виде

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial z} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial z}{\partial Q / \partial \chi} \right)_{\chi=\chi^*} f_z(\chi^*, z) > 0. \quad (23)$$

Здесь функция $Q(\chi, z)$ определяется формулой (6) и конечном итоге параметрами исходной системы уравнений движения КА (1).

Необходимые (11) и достаточные (23) условия устойчивости получены для общего нелинейного случая движения КА и для любого типа резонанса (m и n – произвольные целые числа в соотношении (4)).

Принципиальное отличие результатов этой части работы от результатов работы [5] по исследованию устойчивости движения КА в окрестности стационарной точки заключается в том, что здесь в качестве исходной системы использовалась полная нелинейная система уравнений движения (1), а линейаризация производилась только в окрестности стационарной точки. В работе [5] исходная системы является линейной, а вторая линейаризация производилась уже в окрестности стационарной точки.

Покажем, что для малых углов атаки достаточное условие (23) совпадает с аналогичным условием, полученным в работе [5].

Учитывая, что z – вектор медленно меняющихся переменных, представим соотношение (23) в виде

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial \alpha_{\max}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial \alpha_{\max}}{\partial Q / \partial \chi} \right)_{\chi=\chi^*} f_{\alpha_{\max}}(\chi^*, z) + \\& + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial q} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial q}{\partial Q / \partial \chi} \right)_{\chi=\chi^*} f_q(\chi^*, z) + \\& + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial R} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial R}{\partial Q / \partial \chi} \right)_{\chi=\chi^*} f_R(\chi^*, z) + \\& + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial G} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial G}{\partial Q / \partial \chi} \right)_{\chi=\chi^*} f_G(\chi^*, z) > 0.\end{aligned}\quad (24)$$

Введем следующие допущения [5]. Во-первых, второй член в условии (24), учитывающий изменение скоростного напора q , слабо зависит от воз-

мущений и есть вполне постоянная величина для данного аппарата. Во-вторых, влияние третьего и четвертого слагаемых в (24) на резонансное движение КА незначительно, и условие устойчивости обеспечивается достаточно большим значением $f_{\alpha_{\max}}(\chi^*, \mathbf{z})$.

С учетом принятых допущений, соотношение

$$\left| -\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial q} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q}{\partial q} \right)_{\chi=\chi^*} f_q(\chi^*, \mathbf{z}) - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial R} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q}{\partial R} \right)_{\chi=\chi^*} f_R(\chi^*, \mathbf{z}) - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial G} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q}{\partial G} \right)_{\chi=\chi^*} f_G(\chi^*, \mathbf{z}) \right| < C_1.$$

Полагая, что для малых углов атаки

$$f_{\alpha_{\max}}(\chi^*, \mathbf{z}) = \frac{da_1(\chi^*, \mathbf{z})}{d\tau},$$

где a_1 – угол между продольной осью аппарата и вектором кинетического момента, представим формулу (25) в виде

$$\frac{da_1(\chi^*, \mathbf{z})}{d\tau} > C^*, \quad (26)$$

$$\text{где } C^* = \frac{C_1}{\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial \alpha_{\max}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_{\max}} \right)_{\chi=\chi^*}}.$$

Условие устойчивости (26) совпадает с достаточным условием устойчивости для квазилинейного случая движения, приведенном в работе [5].

ПРИМЕР

В заключении рассмотрим пример, на котором покажем возможные виды устойчивости резонансного движения аппарата.

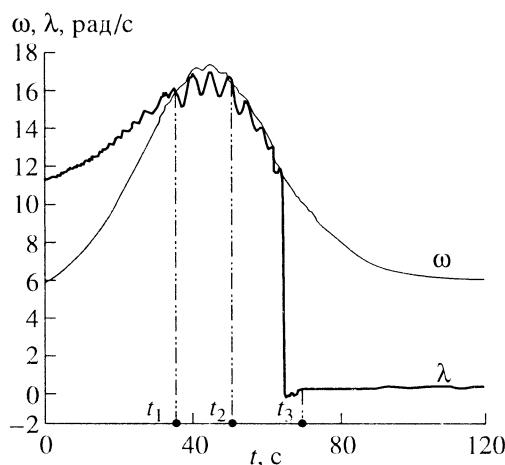


Рис. 5

(24) можно переписать следующим образом

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial \alpha_{\max}} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_{\max}} \right)_{\chi=\chi^*} \times f_{\alpha_{\max}}(\chi^*, \mathbf{z}) > C_1, \quad (25)$$

где C_1 – некоторая положительная величина, определяемая из условия

На рис. 5 показано изменение частот колебаний $\omega(\mathbf{z})$ и $\lambda(\mathbf{z})$ от времени t , для КА с массово-геометрическими параметрами:

$$m = 200 \text{ кг}, \quad \bar{J}_x = 0.4, \quad S = 0.4 \text{ м}^2, \\ L = 0.7 \text{ м}, \quad \bar{x}_T = 0.05, \quad \bar{z}_T = 0.002,$$

при следующих начальных условиях:

$$\alpha_0 = 47^\circ, \quad \varphi_0 = 0^\circ, \\ R_0 = 4.18 \text{ с}^{-1}, \quad G_0 = 2.96 \text{ с}^{-1},$$

$$H_0 = 60 \text{ км}, \quad V_0 = 4.8 \text{ км/с}, \quad \Theta_0 = -7^\circ.$$

В окрестности точек t_1, t_2 и t_3 аппарат захватывается в резонанс. Фазовые траектории, а также начальное и конечное положение сепаратрисы для всех трех резонансов показаны соответственно на рис. 6а, 6б и 6в. На этих рисунках тонкой сплошной линией изображена фазовая траектория КА. Толстой штриховой линией показано положение сепаратрисы в начальный момент времени, соответствующий захвату в резонанс. Толстой сплошной линией изображено конечное положение сепаратрисы.

В моменты времени t_1, t_2 и t_3 вычислялось достаточное условие устойчивости резонанса (15) и достаточно условие устойчивости по Ляпунову (23).

В точке t_1 достаточное условие устойчивости (23) является истинным, однако не выполняется соотношение (15). Это означает, что с течением времени колебательная область сжимается, и фазовая траектория “выталкивается” во вращательную область (рис. 6а). В этом случае КА переходит от колебательного режима движения к вращательному. Такой резонансный режим движения неустойчив.

В момент времени t_2 достаточное условие (23) не выполняется, а неравенство (15) является истинным. Как видно из рис. 6б, с течением времени фазовая траектория покидает малую окрестность стационарной точки типа центр, но оста-

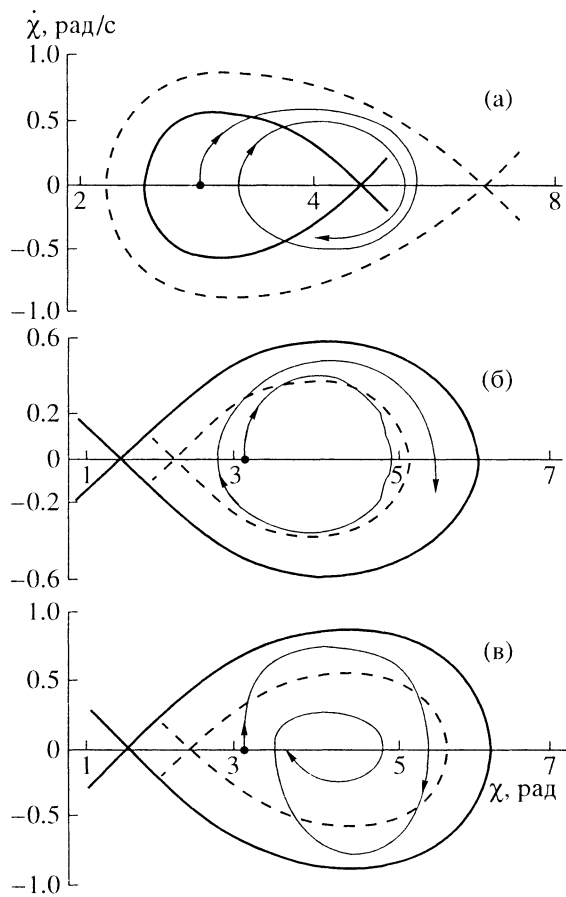


Рис. 6

ся внутри сепаратрисы в пределах области колебательного движения. При этом аппарат совершает колебания с возрастающей амплитудой. Такой резонансный режим движения устойчив.

В точке t_3 одновременно выполняется и неравенство (15) и достаточное условие (23). Это означает, что колебательная область расширяется, а фазовая траектория попадает в малую окрестность стационарной точки типа центр. В этом случае аппарат совершает затухающие колебания. Такой резонансный режим движения устойчив и устойчиво движение системы по Ляпунову в малой окрестности стационарной точки (см. рис. 6а).

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что при анализе нелинейных резонансов следует проводить исследование устойчивости как самого резонанса, так и устойчивости по Ляпунову в окрестности стационарной точки, поскольку из устойчивости резонанса не следует устойчивости по Ляпунову и наоборот (рис. 6а и 6б).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асланов В.С., Мясников С.В. Устойчивость нелинейных резонансных режимов движения космического аппарата в атмосфере // Космич. исслед. 1996. Т. 34. № 6. С. 626–632.
2. Хапаев М.М. Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высшая школа, 1988.
3. Асланов В.С. Нелинейные резонансы при неуправляемом спуске в атмосфере асимметричных КА // Космич. исслед. 1992. Т. 30. Вып. 5. С. 608–614.
4. Нейштадт А.И. Вопросы теории возмущений нелинейных резонансных систем // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математически наук. М.: ВИНТИ, 1988.
5. Заболотнов Ю.М. Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере КА с малой асимметрией. 3 // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 4–5. С. 112–125.

Analysis of Nonlinear Resonances While Spacecraft Descending in Atmosphere

V.S. Aslanov and S.V. Mjasnikov

Samara State Aerospace University, Moskovskoe sh., 34, Samara, 443086 Russia

Uncontrolled motion about the mass centre of an asymmetric spacecraft while descending in a planet atmosphere is considered in nonlinear statement. Investigation of stability of nonlinear resonances and Ljapunov's stability of system's motion in neighbourhood of stationary point under influence of small disturbances is carried out on the basis of partially averaged system. Necessary and sufficient conditions of both considered stability kinds are derived. On the basis of numerical example it is shown, that motion stability in neighbourhood of stationary point does not follow from resonance stability, and vice versa.