УДК 629.78.015

СТАБИЛИЗАЦИЯ СПУСКАЕМОГО АППАРАТА ЧАСТИЧНОЙ ЗАКРУТКОЙ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ НЕУПРАВЛЯЕМОГО СПУСКА

© 2002 г. В. С. Асланов, А. В. Дорошин

Самарский государственный аэрокосмический университет Поступила в редакцию 04.07.2000 г.

Рассматривается стабилизация спускаемого аппарата (СА) способом частичной закрутки при осуществлении неуправляемого спуска в атмосферу. Аппарат в этом случае представляет собой составную конструкцию, состоящую из двух твердых тел — спускаемой капсулы и стабилизирующего блока, приводимого во вращательное движение. Строится модель пространственного движения спускаемого аппарата как системы соосных твердых тел, вращающихся относительно общей оси симметрии. Проводится исследование свободного движения, а также анализ устойчивости стационарных режимов. Рассматривается пространственное движение системы при наличии малой асимметрии, связанной со смещением осей динамических симметрий тел относительно оси вращения и находятся приближенные решения для параметров движения свободной системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При осуществлении неуправляемого спуска СА необходимо обеспечить попадание в определенную область земной поверхности с наименьшей величиной рассеивания точек падения, а также выполнить требования, связанные с уровнем перегрузок и условиями работы парашютной системы. Попадание в заданную область с требуемой величиной рассеивания точек посадки определяется начальными условиями входа СА в атмосферу и характеристиками аппарата. Для обеспечения требуемых углов входа в плотные слои атмосферы необходимо определенным образом сориентировать СА и выдать тормозной импульс. Стабилизация СА осуществляется его закруткой относительно продольной оси. После входа СА в атмосферу производится гашение угловой скорости закрутки для выполнения условий работы парашютной системы, а также предотвращения возникновения резонансных режимов движения [1, 2]. Гашение угловой скорости СА может осуществляться с помощью системы грузов на разматывающихся тросах, отделяемых в конце процесса [3].

Одним из способов стабилизации, исключающим последующее гашение угловой скорости всего аппарата, является его частичная закрутка, при которой во вращательное движение приводится какой-либо блок СА, отделяемый после входа в атмосферу. При этом возвращаемая часть СА не приводится во вращательное движение. Аппарат в данном случае представляет собой механическую систему двух твердых тел, имеющих общую ось вращения. Одно из этих тел является стабилизирующим блоком, а другое представляет собой СА. Аппараты, допускающие частичную

закрутку, могут быть использованы в системах дистанционного зондирования земной поверхности для доставки полученного фотоматериала на Землю: тело l представляет собой стабилизирующий блок с тормозной двигательной установкой, отсоединяемый после входа в атмосферу, а тело 2 — непосредственно спускаемый аппарат (рис. 1).

Известны работы [4, 5], посвященные исследованию переходных режимов движения и устойчивости стабилизируемых состояний спутников с двойным вращением, осесимметричных гиростатов, а также некоторых более общих систем, состоящих из многих соосных маховиков.

Ставится задача проведения исследования свободного движения соосных тел, в том числе при

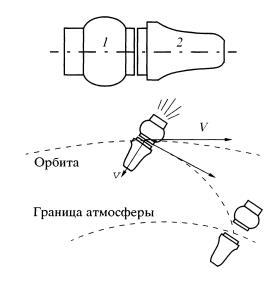


Рис. 1. Общий вид СА и процесс входа в атмосферу.

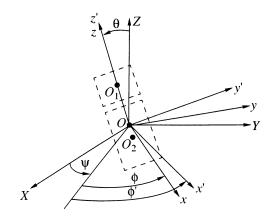


Рис. 2. Схема соосных тел и используемые системы координат.

наличии асимметрии, обусловленной малым смещением продольной оси симметрии одного из тел от оси вращения, а также анализа устойчивости стационарных режимов.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ

Пусть система координат OXYZ движется поступательно в инерциальном пространстве, а ее начало совпадает с центром масс системы соосных тел. Системы координат Ox'y'z' и Oxyz связаны с телами I и 2 соответственно и вращаются относительно системы OXYZ. Оси Oz и Oz' связанных систем совпадают с общей осью вращения тел (рис. 2). Положение соосных тел относительно системы OXYZ будем характеризовать эйлеровыми углами: ψ – угол прецессии, θ – угол нутации, φ' , φ – углы собственных вращений тел I и 2.

Векторы угловых скоростей вращений тел I и 2 $\mathbf{\omega}' = (p', q', r')$ и $\mathbf{\omega} = (p, q, r)$ представлены в проекциях на оси своих связанных систем координат (Ox'y'z' и Oxyz) и выражаются через углы Эйлера следующим образом:

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi,$$

$$p' = \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi' + \dot{\theta}\cos\phi',$$

$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi,$$

$$q' = \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi' - \dot{\theta}\sin\phi',$$

$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}, \quad r' = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}'.$$

Введем угол и скорость относительного закручивания:

$$\delta = \phi' - \phi, \quad \sigma = \dot{\delta}.$$

Компоненты вектора угловой скорости $\mathbf{\omega}' = (p', q', r')$, выраженные через компоненты p, q, r угловой

скорости тела 2 имеют вид:

$$p' = p\cos\delta + q\sin\delta,$$

$$q' = q\cos\delta - p\sin\delta,$$

$$r' = r + \sigma.$$
(1)

Для получения уравнений движения системы соосных тел применим теорему об изменении кинетического момента [6], выбирая в качестве полюса O центр масс системы:

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e. \tag{2}$$

Пусть рассматриваемая система включает в себя динамически симметричные тела. Главные моменты инерции тел I и 2, вычисленные в своих связанных системах координат Ox'y'z' и Oxyz, обозначим как A_1 , C_1 , и A_2 , C_2 . Введенные моменты инерции не являются центральными, так как начала связанных с телами систем координат Ox'y'z' и Oxyz совпадают с центром масс системы двух тел. Для указанных моментов инерции можно записать:

$$A_i = m_i l_i^2 + \overline{A}_i, \quad C_i = \overline{C}_i, \quad (i = 1, 2),$$

где m_i , \overline{A}_i , \overline{C}_i — масса и собственные главные центральные моменты инерции тела i, l_i — расстояние между центром масс системы тел и центром масс тела i.

Кинетический момент системы относительно центра масс равен векторной сумме кинетических моментов тел I и 2 относительно точки O: $\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$.

Вычисляя производную кинетического момента системы как суммы кинетических моментов тел, используя при этом локальные производные в связанных системах Ox'y'z' и Oxyz, уравнение (2) можно записать в системе Oxyz:

$$\hat{\delta} \left[\frac{\tilde{d} \mathbf{K}_1}{dt} + \mathbf{\omega}' \times \mathbf{K}_1 \right] + \left[\frac{\tilde{d} \mathbf{K}_2}{dt} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{K}_2 \right] = \mathbf{M}_0^e, \quad (3)$$

где ω' , ω – угловые скорости вращения связанных систем координат относительно движущейся поступательно системы OXYZ; знак "~" обозначает локальную производную в соответствующей подвижной системе координат; $\hat{\delta}$ – тензор перехода от системы координат Ox'y'z' к системе Oxyz; $\mathbf{K}_1 = (A_1p', A_1q', C_1r')$, $\mathbf{K}_2 = (A_2p, A_2q, C_2r)$.

Перепишем уравнение (3) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \cos \delta - \sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1} \dot{p}' \\ A_{1} \dot{q}' \\ C_{1} \dot{r}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{1} p' \\ A_{1} q' \\ C_{1} r' \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} A_{2} \dot{p} \\ A_{2} \dot{q} \\ C_{2} \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{2} p \\ A_{2} q \\ C_{2} r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{x} \\ M_{y} \\ M_{z} \end{bmatrix},$$

$$(4)$$

где $M_x = M_{1,x} + M_{2,x}$; $M_y = M_{1,y} + M_{2,y}$; $M_z = M_{1,z} + M_{2,z} -$ компоненты моментов внешних сил, представляющие собой суммы соответствующих проекций моментов, приложенных к телам I и 2 соответственно.

Принимая во внимание выражения (1) для компонент угловых скоростей тел, последнее матричное выражение можно свести к следующей системе скалярных уравнений:

$$(A_{1} + A_{2})\dot{p} - (A_{1} + A_{2} - C_{2})qr + C_{1}q(r + \sigma) = M_{x},$$

$$(A_{1} + A_{2})\dot{q} - (C_{2} - A_{1} - A_{2})pr -$$

$$-C_{1}p(r + \sigma) = M_{y},$$

$$C_{1}(\dot{r} + \dot{\sigma}) + C_{2}\dot{r} = M_{z}.$$
(5)

Для получения уравнения относительного движения тел воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода, соответствующим углу относительного закручивания б. Запишем выражения для кинетической энергии системы и обобщенной силы:

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{K}_{1} \cdot \mathbf{\omega}' + \frac{1}{2}\mathbf{K}_{2} \cdot \mathbf{\omega} =$$

$$= \frac{1}{2}[(A_{1} + A_{2})(p^{2} + q^{2}) + C_{2}r^{2} + C_{1}(r^{2} + 2r\sigma + \sigma^{2})],$$

$$Q_{\delta} = M_{1z} + M_{\delta},$$

где M_{δ} – момент внутреннего взаимодействия тел вдоль оси вращения.

Величины p, q, r явно не зависят от угла относительного закручивания δ и скорости относительной закрутки ($\sigma = \dot{\delta}$), поэтому уравнение относительного движения будет иметь вид:

$$C_1(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_{1,z} + M_{\delta}. \tag{6}$$

Добавим к динамическим уравнениям (5) и (6) кинематические уравнения для углов Эйлера:

$$\dot{\theta} = p\cos\phi - q\sin\phi, \ \dot{\phi} = r - \cot\theta(p\sin\phi + q\cos\phi),$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\sin\theta}(p\sin\phi + q\cos\phi), \ \dot{\delta} = \sigma.$$
(7)

3. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ

Пусть моменты от внешних сил, действующих на механическую систему отсутствуют ($M_x = M_y = M_z = 0$), а между соосными телами действует постоянный момент относительного закручивания: $M_\delta = M$.

В этом случае система уравнений (5) и (6) запишется в виде:

$$\dot{p} = (A_1 + A_2)^{-1} ([A_1 + A_2 - C_2]qr - C_1q[r + \sigma]),$$

$$\dot{q} = (A_1 + A_2)^{-1} \times \times ([C_2 - A_1 - A_2]pr + C_1p[r + \sigma]),$$

$$\dot{r} = \frac{-M}{C_2}, \quad \dot{\sigma} = \frac{M(C_1 + C_2)}{C_1C_2}.$$
(8)

Следуя [6], выберем поступательно движущуюся систему координат так, чтобы ось *OZ* совпадала с неизменным направлением вектора кинетического момента. В этом случае выражения для угловых скоростей и углов Эйлера имеют вип:

$$p = \frac{K}{A_1 + A_2} \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad q = \frac{K}{A_1 + A_2} \sin \theta_0 \cos \varphi,$$

$$r = \frac{-Mt}{C_2} + r_0, \quad \sigma = \frac{M(C_1 + C_2)}{C_1 C_2} t + \sigma_0,$$

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \frac{-Mt^2}{2C_2} + \left(r_0 - \frac{K}{A_1 + A_2} \cos \theta_0\right) t + \varphi_0,$$

$$\psi = \frac{K}{A_1 + A_2} t + \psi_0, \quad \delta = \frac{M(C_1 + C_2)}{2C_1 C_2} t^2 + \sigma_0 t + \delta_0,$$

где K — величина кинетического момента системы.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

Определим возможные стационарные режимы движения свободной системы, приравняв для этого нулю производные угловых скоростей в уравнениях (8):

$$(A_1 + A_2)^{-1}([A_1 + A_2 - C_2]qr - C_1q[r + \sigma]) = 0,$$

$$(A_1 + A_2)^{-1}([C_2 - A_1 - A_2]pr + C_1p[r + \sigma]) = 0,$$

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\sigma} = 0.$$

Существуют два стационарных режима:

1)
$$p = p_0$$
, $q = q_0$, $r = r_0$,

$$\sigma = \frac{A_1 + A_2 - C_1 - C_2}{C_1} r_0$$
,
2) $p = 0$, $q = 0$, $r = r_0$, $\sigma = \sigma_0$,

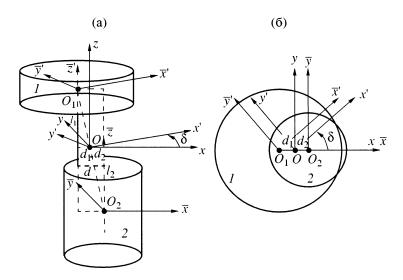


Рис. 3. Соосные тела при наличии малой асимметрии.

где p_0, q_0, r_0, σ_0 – постоянные величины.

Проведем анализ устойчивости первого режима. Введем малые возмущения угловых скоростей Δp , Δq , Δr , $\Delta \sigma$ и запишем уравнения возмущенного движения:

$$\frac{d\Delta p}{dt} = (A_1 + A_2)^{-1} \times \\
\times ([A_1 + A_2 - C_2]\Delta r - C_1[\Delta r + \Delta \sigma])(q_0 + \Delta q), \\
\frac{d\Delta q}{dt} = (A_1 + A_2)^{-1} \times (10) \\
\times ([C_2 - A_1 - A_2]\Delta r + C_1[\Delta r + \Delta \sigma])(p_0 + \Delta p), \\
\frac{d\Delta r}{dt} = 0, \quad \frac{d\Delta \sigma}{dt} = 0.$$

Общее решение системы (10) имеет следующий вид:

$$\Delta p = D_1 \cos \chi t + D_2 \sin \chi t - p_0,$$

$$\Delta q = D_2 \cos \chi t - D_1 \sin \chi t - q_0,$$

$$\Delta \sigma = (\Delta \sigma)_0, \quad \Delta r = (\Delta r)_0,$$
(11)

где $\chi = (A_1 + A_2)^{-1}([A_1 + A_2 - C_2]\Delta r - C_1[\Delta r + \Delta \sigma]),$ $D_1 = (\Delta p)_0 + p_0, D_2 = (\Delta q)_0 + q_0,$ а $(\Delta p)_0, (\Delta q)_0, (\Delta \sigma)_0,$ $(\Delta r)_0$ — начальные значения малых возмущений.

Из решений (11) видно, что первый стационарный режим является устойчивым в линейном приближении в пространстве угловых скоростей. Можно показать, что при первом стационарном режиме векторы кинетического момента системы и угловой скорости тела 2 сонаправлены: $\mathbf{K} = (A_1 + A_2) \mathbf{\omega}$.

Второй режим допускает исследование на устойчивость с помощью функции Ляпунова:

 $L = (\Delta p)^2 + (\Delta q)^2 + (\Delta r)^2 + (\Delta \sigma)^2$. Производная этой функции в силу уравнений соответствующей возмущенной системы тождественно равна нулю, следовательно, этот режим является устойчивым и характеризует вращения тел вокруг главной оси эллипсоида инерции, совпадающей с общей осью вращения тел.

5. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ МАЛОЙ АСИММЕТРИИ

Рассмотрим движение системы соосных тел при наличии малой асимметрии, связанной со смещением d общей оси вращения от оси динамической симметрии тела 2 (рис. 3). При этом ось динамической симметрии тела l совпадает с осью вращения и параллельна оси динамической симметрии тела l. В этом случае центр масс системы l0 будет принадлежать отрезку l10, образованному центрами масс тел и не будет изменять своего положения относительно тела l2.

Введем в рассмотрение следующие системы координат. Oxyz — основная подвижная система координат, оси которой жестко связаны с телом 2, причем ось Ox лежит в экваториальной плоскости, перпендикулярной оси вращения и совпадает с проекцией отрезка O_1O_2 на эту плоскость, ось Oy лежит в указанной плоскости. $O_2\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ — главная центральная система координат, связанная с телом 2, оси которой параллельны осям системы Oxyz. $O_1\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$ — главная центральная система координат, связанная с телом 1. Ox'y'z' — система координат с началом в центре масс O, оси которой параллельны осям системы $O_1\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$. За угол относительной закрутки примем угол между экваториальными осями Ox и Ox'. Пусть $oxin M_1$ и $oxin M_2$ — масториальными осями $oxin M_2$ и $oxin M_3$ и $oxin M_4$ и

сы тел l и 2 соответственно, а l – расстояние между центрами масс тел O_1 и O_2 .

Проекции угловой скорости тела 2 в системах Oxyz и $O_2\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ одинаковы и равны p,q,r, также одинаковы и равны p',q',r' проекции угловой скорости тела l в системах Ox'y'z' и $O_1\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$, так как соответствующие оси являются параллельными. Расстояния между центрами масс тел l,2 и центром масс системы в направлении оси вращения соответственно равны (рис. 3): $l_1 = lm_2/(m_1 + m_2), l_2 = lm_1/(m_1 + m_2)$, а в направлении, перпендикулярном оси вращения: $d_1 = dm_2/(m_1 + m_2), d_2 = dm_1/(m_1 + m_2)$.

Малое смещение d (рис. 3) приводит к изменению моментов инерции тела 2 в системе Oxyz:

$$I_{xx} = \overline{A}_2 + m_2 l_2^2, \quad I_{yy} = \overline{A}_2 + m_2 l_2^2 + m_2 d_2^2,$$

$$I_{zz} = \overline{C}_2 + m_2 d_2^2,$$

$$I_{xy} = I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = -m_2 (-l_2) d_2 = m_2 l_2 d_2,$$

где \overline{A}_2 , \overline{C}_2 — экваториальный и продольный моменты инерции тела 2, вычисленные в центральной системе $O_2 \bar{x} \bar{y} \bar{z}$.

Запишем теорему об изменении кинетического момента в системе координат Oxyz в виде (3). Для этого найдем проекции кинетических моментов тел I и 2 на оси систем Ox'y'z' и Oxyz соответственно. Кинетический момент тела I вычисляется как сумма кинетических моментов движения центра масс тела $I - \mathbf{K}_1^e$ и кинетического момента тела I при его вращении относительно центра масс $- \mathbf{K}_1^r : \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^e + \mathbf{K}_1^r$.

В проекциях на оси системы координат Ox'y'z' получим:

$$\mathbf{K}_{1} = m_{1} \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -d_{1} \\ 0 \\ l_{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -d_{1} \\ 0 \\ l_{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{A}_{1} p' \\ \overline{A}_{1} q' \\ \overline{C}_{1} r' \end{bmatrix} =$$

$$= m_{1} \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_{1}^{2} p + d_{1} l_{1} r \\ q (l_{1}^{2} + d_{1}^{2}) \\ d_{1}^{2} r + d_{1} l_{1} p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{A}_{1} p' \\ \overline{A}_{1} q' \\ \overline{C}_{1} r' \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где \overline{A}_1 , \overline{C}_1 – главные экваториальные и продольный центральные моменты инерции тела I, а $[\delta]$ =

$$= \begin{bmatrix} \cos \delta - \sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{матрица перехода от системы}$$

координат Ox'y'z' к системе Oxyz.

Кинетический момент тела 2 запишем в системе Oxyz:

$$\mathbf{K}_{2} = \hat{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} (\overline{A}_{2} + m_{2}l_{2}^{2})p + m_{2}l_{2}d_{2}r \\ (\overline{A}_{2} + m_{2}l_{2}^{2} + m_{2}d_{2}^{2})q \\ (\overline{C}_{2} + m_{2}d_{2}^{2})r + m_{2}l_{2}d_{2}p \end{bmatrix}.$$
(13)

С учетом (12) и (13) векторное уравнение (3) в системе координат Oxyz примет вид:

$$\begin{bmatrix}
(\overline{A}_{2} + m_{2}l_{2}^{2})\dot{p} + m_{2}l_{2}d_{2}\dot{r} \\
(\overline{A}_{2} + m_{2}l_{2}^{2} + m_{2}d_{2}^{2})\dot{q} \\
(\overline{C}_{2} + m_{2}d_{2}^{2})\dot{r} + m_{2}l_{2}d_{2}\dot{p}
\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \\
\times \begin{bmatrix}
(\overline{A}_{2} + m_{2}l_{2}^{2})p + m_{2}l_{2}d_{2}r \\
(\overline{A}_{2} + m_{2}l_{2}^{2})p + m_{2}l_{2}d_{2}r \\
(\overline{A}_{2} + m_{2}l_{2}^{2} + m_{2}d_{2}^{2})q \\
(\overline{C}_{2} + m_{2}d_{2}^{2})r + m_{2}l_{2}d_{2}p
\end{bmatrix} + \\
+ [\delta] \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_{1} [\delta]^{-1} \begin{bmatrix} l_{1}^{2}p + d_{1}l_{1}r \\ q(l_{1}^{2} + d_{1}^{2}) \\ d_{1}^{2}r + d_{1}l_{1}p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{A}_{1}p' \\ \overline{A}_{1}q' \\ \overline{C}_{1}r' \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} \times \\
\times \left(m_{1} [\delta]^{-1} \begin{bmatrix} l_{1}^{2}p + d_{1}l_{1}r \\ q(l_{1}^{2} + d_{1}^{2}) \\ d_{1}^{2}r + d_{1}l_{1}p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{A}_{1}p' \\ \overline{A}_{1}q' \\ \overline{C}_{1}r' \end{bmatrix} \right) \right\} = \begin{bmatrix} M_{x} \\ M_{y} \\ M_{z} \end{bmatrix}.$$

Используя выражения (1), уравнения (14) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{split} (A_1+A_2)\dot{p}+qr(C_1-A_1+C_2-A_2)+C_1q\sigma &=\\ &=M_x-(m_1l_1d_1+m_2l_2d_2)(pq+\dot{r}),\\ &(A_1+A_2+m_1d_1^2+m_2d_2^2)\dot{q}+\\ &+pr(A_1-C_1+A_2-C_2-m_1d_1^2-m_2d_2^2)-C_1p\sigma &=\\ &=M_y-(m_1l_1d_1+m_2l_2d_2)(r^2-p^2),\\ &(C_1+C_2+m_1d_1^2+m_2d_2^2)\dot{r}+C_1\dot{\sigma} &=\\ &=M_z-(m_1l_1d_1+m_2l_2d_2)(\dot{p}-qr)-(m_1d_1^2+m_2d_2^2)pq,\\ \mathrm{где}\,A_i&=\overline{A}_i+m_il_i^2\,,\,C_i&=\overline{C}_i\;(i=1,2). \end{split}$$

Уравнение относительного движения тел в рассматриваемом случае получается аналогичным уравнению (6). Система (15) совместно с

уравнением (6), представляют собой динамические уравнения движения соосных тел при наличии указанного рода асимметрии.

В качестве малого параметра є выберем безразмерную величину, характеризующую смещение осей динамических симметрий тел от оси врашения:

$$\varepsilon = \frac{m_1 d_1 l_1 + m_2 d_2 l_2}{A_1 + A_2} = \frac{m_1 m_2 dl}{(m_1 + m_2)(A_1 + A_2)}.$$
 (16)

Пусть моменты внешних сил и внутреннего взаимодействия отсутствуют, тогда, с точностью порядка ϵ , динамические уравнения можно записать:

$$\dot{p} + aqr + bq\sigma = -\varepsilon(pq + \dot{r}),$$

$$\dot{q} - apr - bp\sigma = -\varepsilon(r^2 - p^2),$$

$$(C_1 + C_2)\dot{r} + C_1\dot{\sigma} = -\varepsilon(A_1 + A_2)(\dot{p} - qr),$$

$$\dot{\sigma} = -\dot{r},$$
(17)

где
$$a = \frac{C_1 - A_1 + C_2 - A_2}{A_1 + A_2}$$
, $b = \frac{C_1}{A_1 + A_2}$ – безразмер-

ные параметры.

Перейдем от экваториальных угловых скоростей к переменным типа "амплитуда—фаза" G и F с помощью следующей замены:

$$p = G(t)\cos F(t), \quad q = G(t)\sin F(t). \tag{18}$$

Динамические уравнения (17) с точностью порядка є перепишутся следующим образом:

$$\dot{G} = -\varepsilon r^2 \cos F,$$

$$\dot{F} = -(ar + b\sigma) - \frac{\varepsilon [G^2 - r^2] \sin F}{G},$$

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon (A_1 + A_2)}{C_2} G[r + (ar + b\sigma)] \cos F,$$

$$\dot{\sigma} = -\dot{r}.$$
(19)

Решения порождающей системы уравнений $(\epsilon = 0)$ имеют вид:

$$\overline{G} = \frac{K \sin \theta_0}{A_1 + A_2}, \quad \overline{F} = \omega t + \varphi_0,
\overline{r} = r_0, \quad \overline{\sigma} = \sigma_0,$$
(20)

где
$$\omega = r_0 - \frac{K}{A_1 + A_2} \cos \theta_0 = r_0 - \frac{K_z}{A_1 + A_2} = r_0 - \frac{C_1 \sigma_0 + (C_1 + C_2) r_0}{A_1 + A_2} = -a r_0 - b \sigma_0.$$

Используя теорему Пуанкаре [7], будем искать решения возмущенной системы (19) в виде следу-

ющих разложений, ограничиваясь двумя членами асимптотического ряда:

$$G(t) = \overline{G} + \varepsilon g(t), \quad F(t) = \overline{F} + \varepsilon f(t),$$

$$\sigma(t) = \overline{\sigma} + \varepsilon \Sigma(t), \quad r(t) = \overline{r} + \varepsilon R(t), \quad (21)$$

$$\delta(t) = \overline{\delta} + \varepsilon \Delta(t), \quad \dot{\Delta} = \Sigma,$$

где $\bar{\delta} = \sigma_0 t + \delta_0$, а $g(t), f(t), R(t), \Sigma(t), \Delta(t)$ — подлежащие нахождению функции.

Подставляя выражения (21) в возмущенную систему (19) и приравнивая члены порядка є, получим систему уравнений для возмущений:

$$\dot{g} = -r_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\dot{f} = -(aR + b\Sigma) - \frac{\overline{G}^2 - r_0^2}{\overline{G}} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$\dot{R} = \frac{A_1 + A_2}{C_2} \overline{G} [r_0 - \omega] \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\dot{\Sigma} = -\frac{A_1 + A_2}{C_2} \overline{G} [r_0 - \omega] \cos(\omega t + \varphi_0).$$
(22)

Следуя [7], получим решение системы (22) при нулевых начальных значениях малых возмущений:

$$g(t) = -\frac{r_0^2}{\omega} [\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin\varphi_0],$$

$$f(t) = \gamma t + \beta [\cos(\omega t + \varphi_0) - \cos\varphi_0],$$

$$R(t) = \alpha (\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin\varphi_0),$$

$$\Sigma(t) = -\alpha (\sin(\omega t + \varphi_0) - \sin\varphi_0),$$
(23)

где

$$\alpha = \frac{A_1 + A_2}{C_2 \omega} \overline{G}[r_0 - \omega],$$

$$\beta = -\frac{1}{\omega} \left\{ \frac{A_1 + A_2}{C_2 \omega} \overline{G}[r_0 - \omega](b - a) - \frac{\overline{G}^2 - r_0^2}{\overline{G}} \right\},$$

$$\gamma = \alpha \sin \varphi_0(a - b).$$

Из выражений (23) и (21) следует зависимость от времени для переменных "амплитуда—фаза", а также угловых скоростей r и σ системы соосных тел с малой асимметрией.

С точностью порядка є зависимости для экваториальных угловых скоростей можно записать:

$$p(t) = \overline{G}\cos\overline{F} + \varepsilon P(t), q(t) = \overline{G}\sin\overline{F} + \varepsilon Q(t), (24)$$

где

$$P(t) = g\cos\overline{F} - \frac{1}{G}(\beta[\cos(\omega t + \varphi_0) - \cos\varphi_0] + \gamma t)\sin\overline{F},$$

$$Q(t) = g\sin\overline{F} + \frac{1}{G}(\beta[\cos(\omega t + \varphi_0) - \cos\varphi_0] + \gamma t)\cos\overline{F}.$$

Перейдем к определению зависимостей для углов Эйлера, которые будем искать в виде следующих разложений по малому параметру є:

$$\psi = \overline{\psi} + \varepsilon \Psi(t), \quad \theta = \overline{\theta} + \varepsilon \Theta(t),
\varphi = \overline{\varphi} + \varepsilon \Phi(t).$$
(25)

Порождающие решения ($\overline{\psi}$, $\overline{\theta}$, $\overline{\phi}$) определяются зависимостями (9) с учетом того, что момент внутреннего взаимодействия тел равен нулю (M=0). Подставляя разложения (25) и полученные зависимости для угловых скоростей в уравнения Эйлера (7), приравнивая члены порядка ε , получим кинематические уравнения первого приближения:

$$\dot{\Psi} = -\frac{K\cos\bar{\theta}}{(A_1 + A_2)\sin\bar{\theta}}\Theta + \frac{1}{\sin\bar{\theta}}[P\sin\bar{\phi} + Q\cos\bar{\phi}],$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{K\sin\bar{\theta}}{A_1 + A_2}\Phi + P\cos\bar{\phi} - Q\sin\bar{\phi}, \qquad (26)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{K}{(A_1 + A_2)\sin\bar{\theta}}\Theta - \cot\bar{\theta}[P\sin\bar{\phi} + Q\cos\bar{\phi}].$$

Отдельно проинтегрируем последние два уравнения неоднородной линейной системы уравнений (26). Воспользуемся формулой Коши [8]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{M}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{M}(t)\int_{t_0}^t \mathbf{M}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds, \quad (27)$$

где y(t) — общее решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений L(y) = f(t), L — линейный дифференциальный оператор, t_0 — начальное значение независимой переменной, y_0 — вектор начальных значений искомых функций, $\mathbf{M}(t)$ — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы, а $\mathbf{f}(t)$ — вектор возмущающих функций.

Окончательно запишем решения для малых возмущений углов нутации и собственного вращения при нулевых начальных значениях:

$$\begin{bmatrix} \Theta(t) \\ \Phi(t) \end{bmatrix} = \mathbf{M}(t) \int_{0}^{t} \mathbf{M}^{-1}(s) \begin{bmatrix} f^{\Theta}(s) \\ f^{\Phi}(s) \end{bmatrix} ds, \tag{28}$$

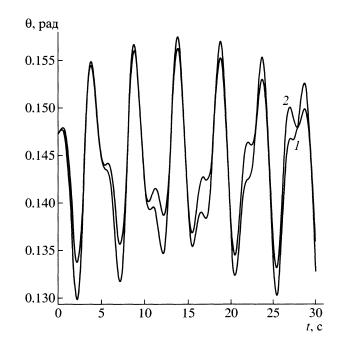


Рис. 4. Сравнение результатов расчета угла нутации: *1* – численное интегрирование, *2* – приближенная аналитическая зависимость.

где

$$f^{\Theta} = P\cos\overline{\varphi} - Q\sin\overline{\varphi},$$

$$f^{\Phi} = -\cot\overline{\theta}[P\sin\overline{\varphi} + Q\cos\overline{\varphi}]$$

- известные возмущающие функции, а

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} -\sin\bar{\theta}\sin\left|\frac{K}{A_1 + A_2}\right| t \sin\bar{\theta}\cos\left|\frac{K}{A_1 + A_2}\right| t \\ \cos\left|\frac{K}{A_1 + A_2}\right| t & \sin\left|\frac{K}{A_1 + A_2}\right| t \end{bmatrix}$$

– фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы.

Если в первое из уравнений (26) подставить зависимость от времени возмущения угла нутации, следующего из (28), то возмущение угла прецессии $\Psi(t)$ определится интегрированием:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sin \theta_0} \times \frac{1}{\sqrt{(A_1 + A_2)}} \Theta(t) + P(t) \sin \bar{\phi} + Q(t) \cos \bar{\phi} dt.$$

Приведем результаты расчета угла нутации $\theta(t)$ (рис. 4) по приближенным аналитическим зависимостям (28), (25), а также с помощью численного интегрирования, полученные при следую-

щих начальных условиях движения и инерционно-массовых параметрах системы:

$$m_1 = 15 \text{ кг}, \quad m_2 = 30 \text{ кг},$$
 $l = 0.4 \text{ м}, \quad d = 0.01 \text{ м},$ $A_1 = 2 \text{ кг м}^2, \quad A_2 = 1.5 \text{ кг м}^2,$ $C_1 = 1.2 \text{ кг м}^2, \quad C_2 = 1.3 \text{ кг м}^2,$ $p_0 = 0.3 \text{ рад/c}, \quad q_0 = 0.2 \text{ рад/c},$ $r_0 = 1.1 \text{ рад/c}, \quad \sigma_0 = 5 \text{ рад/c}.$

При указанных численных значениях малый параметр имеет величину $\varepsilon = 0.01$.

Полученные результаты позволяют проводить анализ движения спускаемых аппаратов с частичной закруткой, а также выбирать начальные условия движения и инерционно-массовые параметры подобных аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978.

- 2. Асланов В.С., Мясников С.В. Устойчивость нелинейных резонансных режимов движения космического аппарата в атмосфере // Космич. исслед. 1996. Т. 34. Вып. 6.
- 3. Асланов В.С., Прошлецов А.И. Движение космического аппарата с малыми грузами, закрепленными на разматывающихся нитях // Труды XXX Чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. М., 1996. С. 59—63
- 4. *Нейштадт А.И.*, *Пивоваров М.Л*. Переход через сепаратрису в динамике спутника с двойным вращением // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. Вып. 5.
- 5. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников / Под ред. Белецкого В.В. М.: Мир, 1975.
- 6. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972.
- 7. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.
- 8. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд. технико-теоретической лит-ры, 1949.

Stabilization of a Reentry Vehicle by a Partial Spin-up during Uncontrolled Descent

V. S. Aslanov and A. V. Doroshin

Korolev State Aerospace University, Samara, Moskovskoe sh. 34, Samara, 443086 Russia

Stabilization of a reentry vehicle (RV) by a partial spin-up of it is considered for the case of uncontrolled descent into the atmosphere. In this case, the descent object is a composite construction consisting of two rigid bodies, a return capsule and a stabilizing block, which is put in rotation. A model is developed for the spatial motion of the reentry vehicle considered as a system of coaxial rigid bodies rotating about a common axis of symmetry. The free motion is studied, and the stability of steady-state regimes is analyzed. The spatial motion of the system is considered for the case of a small asymmetry due to displacement of the axes of dynamic symmetry of the bodies with respect to the spin axis, and approximate solutions for the motion parameters of the free system are found.