КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Т. XIV 1976 Вып. 4

В. С. Асланов

О ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО АППАРАТА ПРИ СПУСКЕ В АТМОСФЕРЕ

Рассматривается пространственное неуправляемое движение летательного аппарата сферической формы относительно центра масс при спуске в атмосфере. Получены осредненные дифференциальные уравнения вращательного движения и их общее решение в неявном виде для любых углов атаки. Определена совокупность параметров аппарата и начальных условий, для которых угол атаки по траектории не превосходит некоторого предельного значения.

Рассматривается пространственное движение аппарата относительно его центра масс при спуске в атмосфере с произвольным углом атаки ($0<\alpha<\pi$). Эта задача для малых углов атаки решена Г. Е. Кузмаком [1].

Известно [2], что характер вращательного движения неуправляемого аппарата зависит от параметра

$$\mu=\frac{2|N_0|}{J_z\lambda V_0|\sin\theta_0|},$$

где N_0 — начальный кинетический момент, J_z — поперечный момент инерции, $\lambda=1/7000$ *м*$^{-1}$, V_0 и θ_0 — соответственно скорость и угол входа в атмосферу. При $\mu\gg1$ движение аппарата является квазипериодическим и на большей части траектории снижения высокочастотным. В таких случаях весьма эффективными оказываются асимптотические методы исследования. В работе методом Ван дер Поля получены осредненные дифференциальные уравнения движения и интеграл этих уравнений. Найдена совокупность параметров аппарата и начальных условий движения, для которых угол атаки α по траектории не превосходит некоторого предельного значения α^*.

1. Будем предполагать, что летательный аппарат обладает динамической симметрией и имеет сферическую форму. Пусть в системе координат $0x_cy_cz_c$, связанной с движением центра масс аппарата, ось абсцисс совпадает с вектором скорости $\mathbf{V}$. Систему осей $0xyz$ совместим с главными центральными осями инерции, причем ось $0x$ направим по оси симметрии аппарата таким образом, чтобы аппарат был статически устойчивым ($M^\alpha<0$). В качестве величин, определяющих положение системы $0xyz$ относительно $0x_cy_cz_c$, примем три угла Эйлера: α — угол нутации (угол атаки), ψ — угол прецессии, φ — угол собственного вращения.

В задачах о спуске аппарата в атмосфере с достаточной точностью можно считать, что на вращательное движение аппарата существенное воздействие оказывает только момент аэродинамической силы $M=M^\alpha\sin\alpha$ и малый демпфирующий момент, который имеет проекции на оси системы $0xyz$: $M_x^{\omega_x}\omega_x$, $M_y^{\omega_y}\omega_y$, $M_z^{\omega_z}\omega_z$, где ω_x, ω_y, ω_z — проекции вектора угловой скорости на те же оси; $M_x^{\omega_x}$, $M_y^{\omega_y}$, $M_z^{\omega_z}$ — вращательные производные, $M^\alpha=\left(\frac{\partial M}{\partial\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0}$. Будем полагать, что $M_y^{\omega_y}=M_z^{\omega_z}$.

Через J_x, J_y, J_z обозначим моменты инерции аппарата относительно осей системы $0xyz$, $J_x \neq J_y = J_z$. Запишем лагранжевы уравнения движения:

$$\ddot{\alpha}+\frac{(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)}{\sin^3\alpha}+M=-f_z\dot{\alpha},$$

$$\dot{R}=-f_xR,\quad \dot{G}=-f_zG-(f_x-f_z)R\cos\alpha,$$

$$\dot{\varphi}=\frac{J_zR}{J_x}-\frac{(G-R\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\qquad \dot{\psi}=\frac{G-R\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\tag{1.1}$$

$$M=g\sin\alpha,\quad g=-M^\alpha/J_z.$$

Здесь $R=\frac{1}{J_z}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}$, $G=\frac{1}{J_z}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}$ с точностью до множителя суть проекции кинетического момента на оси $0x$, $0x_c$; $T=\frac{1}{2}(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2)$ — кинетическая энергия вращательного движения; $f_x=-M_x^{\omega_x}/J_x$, $f_z=-M_z^{\omega_z}/J_z$.

Производные аэродинамических моментов определяются формулами

$$M^\alpha=m^\alpha qLS_{\text{М}},\ M_x^{\omega_x}=m_x^{\bar{\omega}_x}q\frac{L^2S_{\text{М}}}{V},\quad M_z^{\omega_z}=m_z^{\bar{\omega}_z}q\frac{L^2S_{\text{М}}}{V}.\tag{1.2}$$

Здесь m^α, $m_x^{\bar{\omega}_x}$, $m_z^{\omega_z}$ — безразмерные аэродинамические коэффициенты, $q=\rho V^2/2$ — скоростной напор, V — скорость, ρ — плотность атмосферы, L — характерный размер аппарата, $s_{\text{М}}$ — площадь миделевого сечения.

Для осесимметричного аппарата угловое движение его относительно продольной оси $0x$, а также относительно вектора скорости V, вследствие осевой симметрии, обычно не рассматривается, поэтому в дальнейшем последние два уравнения системы (1.1) будем опускать.

Приведем систему уравнений плоского движения центра масс аппарата в атмосфере:

$$\dot{V}=-\sigma_x\rho V^2-g_{\text{т}}\sin\theta,$$

$$\dot{\theta}=-\frac{g_{\text{т}}}{V}\left[1-\frac{V^2}{(R_3+h)g_{\text{т}}}\right]\cos\theta,\qquad \dot{h}=V\sin\theta.\tag{1.3}$$

Здесь θ, h — соответственно угол наклона траектории к горизонту и высота, $g_{\text{т}}$ — ускорение силы тяжести, R_3 — радиус Земли, $\sigma_x=C_xS_{\text{М}}/2m$ — баллистический коэффициент, m — масса аппарата, C_x — коэффициент сопротивления.

Учитывая, что кинетическая энергия поступательного движения аппарата существенно больше кинетической энергии его вращательного движения, проведем разделение движения на «быстрое» и «медленное».

Для этого введем новые переменные:

$$\bar{V}=V/V^*,\quad \bar{h}=\nu g_{\text{т}}h/V^{*2},\tag{1.4}$$

где V^* — характерная скорость, ν — параметр, задаваемый совместно с V^*. Тогда уравнения, входящие в (1.1) и (1.3), примут вид

$$\ddot{\alpha}+\frac{(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)}{\sin^3\alpha}+g\sin\alpha=-\varepsilon\bar{f}_z\dot{\alpha},$$

$$\dot{R}=-\varepsilon\bar{f}_xR,\qquad \dot{G}=-\varepsilon[\bar{f}_zG+(\bar{f}_x-\bar{f}_z)R\cos\alpha],$$

$$\dot{\bar{V}}=-\frac{\varepsilon}{\Omega L}(\sigma_x\rho V^{*2}\bar{V}^2+g_{\text{т}}\sin\theta),\tag{1.5}$$

$$\dot{\theta}=-\frac{\varepsilon g_{\text{т}}\cos\theta}{\Omega L\bar{V}}\left[1-\frac{V^{*2}\bar{V}^2}{g_{\text{т}}R_3-\bar{h}V^{*2}/\nu}\right],$$

$$\dot{h}=\frac{\varepsilon \nu g_{\tau} V}{\Omega L}\sin\theta.$$

Здесь $\varepsilon=\Omega L/V^*$ — малый параметр, Ω — характерная угловая скорость, $\bar{f}_x=f_x V^*/\Omega L$, $\bar{f}_z=f_z V^*/\Omega L$.

Из системы (1.5) видно, что R, G, V, θ, h являются функциями «медленного» времени $\tau=\varepsilon t+\text{const}$.

При $\varepsilon=0$ система (1.5) сводится к одному уравнению невозмущенного движения

$$\ddot{\alpha}+\frac{(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)}{\sin^3\alpha}+g\sin\alpha=0. \tag{1.6}$$

Интегрируя это уравнение и полагая в нем $\cos\alpha=u$, получим

$$\dot{u}^2=(H+2gu)(1-u^2)-(G-Ru)^2=\zeta(u), \tag{1.7}$$

где $H=\text{const}$.

При больших положительных (отрицательных) значениях u $\zeta(u)$ — величина отрицательная (положительная). При $u=\pm 1$ $\zeta(u)=-(G-Ru)^2\leqslant 0$. Поэтому по крайней мере один из корней уравнения $\zeta(u)=0$ (назовем его u_3) меньше или равен -1. Физическое движение реализуется только в том случае, когда $\dot{u}^2\geqslant 0$, а поскольку $u=\cos\alpha$, то два остальных корня кубического уравнения $\zeta(u)=0$ лежат в пределах $-1\leqslant u_1\leqslant u\leqslant u_2\leqslant 1$. Используя подстановку $u=\varepsilon^2+u_1$, проинтегрируем (1.7) в эллиптических функциях

$$\cos\alpha=(u_2-x)\,\mathrm{cn}^2\left(\frac{2K}{\pi}y+K;k\right)+x. \tag{1.8}$$

Здесь приняты обозначения: $x=u_1$, $y=\omega(t-t_0)$, $\omega=\pi\beta/2K$, $\beta=\sqrt{g\eta}$, $k=\sqrt{(u_2-x)/2\eta}$ — модуль эллиптической функции, $K=K(k)$ — полный эллиптический интеграл I рода, t_0 — произвольная постоянная,

$$\eta=\left\{1-\frac{(G^2+R^2)x-2GR}{2g(1-x^2)}+\left[\frac{G^2+R^2-2GRx}{4g(1-x^2)}\right]^2\right\}^{1/2},$$

$$u_2=\eta-\frac{G^2+R^2-2GRx}{4g(1-x^2)}. \tag{1.9}$$

Рассматривая $x=\cos\alpha_{\max}$ и y как функции медленного времени τ, запишем для первого уравнения системы (1.1) укороченные уравнения Ван дер Поля [3]:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}(-\bar{f}_z\omega\alpha_y^2+\xi_1)\,dy,\\ \dot{y}&=\omega+\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}(-\bar{f}_z\omega\alpha_x\alpha_y+\xi_2)\,dy,\end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$\Delta(x,\tau)=(\alpha_x\alpha_{yy}-\alpha_y\alpha_{xy})\,\omega-\omega_x\alpha_y^2,$$
$$\xi_1(x,y,\tau)=(\alpha_\tau\alpha_{yy}-\alpha_{y\tau}\alpha_y)\,\omega-\omega_\tau\alpha_y^2,$$
$$\xi_2(x,y,\tau)=(\alpha_\tau\alpha_{xy}-\alpha_x\alpha_{y\tau})\,\omega+\omega_x\alpha_y\alpha_\tau-\omega_\tau\alpha_x\alpha_y.$$

Здесь нижний индекс означает дифференцирование по указанной переменной.

Подынтегральная функция во втором уравнении системы (1.10) есть нечетная функция аргумента y, поэтому интеграл от этой функции, взятый по периоду 2π, равен нулю. Применяя известные формулы для интегралов от эллиптических функций [4], вычислим правую часть первого уравнения. В уравнениях системы (1.10) перейдем к времени t и добавим к ним третье и четвертое уравнения из (1.1). Полученная при этом система осредненных уравнений запишется в виде

$$\dot{x}=\frac{1}{\Delta}\left[\left(f_z+\frac{\dot{\beta}_t}{\beta}\right)J-u_{2t}J_1-\eta_t J_2\right],$$

$$\dot{y}=\omega,\quad \dot{R}=-f_x R,\quad \dot{G}=-f_z G-(f_x-f_z)R\cos\alpha, \tag{1.11}$$

где

$$J=\frac{2\beta}{\pi}\left[a_{11}K(k)+a_{12}E(k)+a_{13}\Pi\left(k,\frac{1}{n_1}\right)+a_{14}\Pi\left(k,\frac{1}{n_2}\right)\right],$$

$$J_1=\frac{2\beta}{\pi}\left[a_{21}K(k)+a_{22}E(k)+a_{23}\Pi\left(k,\frac{1}{n_1}\right)+a_{24}\Pi\left(k,\frac{1}{n_2}\right)\right], \tag{1.12}$$

$$J_2=\frac{2\beta}{\pi}\left[a_{31}K(k)+a_{32}E(k)+a_{33}\Pi\left(k,\frac{1}{n_1}\right)+a_{34}\Pi\left(k,\frac{1}{n_2}\right)\right],$$

$$\Delta=\frac{4K(1-k^2)(u_2-x)\beta}{\pi(1-x^2)},\quad n_1=\frac{1-u_2}{u_2-x},\quad n_2=-\frac{1+u_2}{u_2-x},\quad k=\sqrt{(u_2-x)/2\eta}.$$

Здесь $E(k)$, $\Pi(k, n)$ — полные эллиптические интегралы II и III рода:

$$\|a_{ij}\|=$$

$$\left\|\begin{matrix} 4k^2(1+n_1+n_2) & 4 & -2(1-x)(1+k^2n_1) & -2(1+x)(1+k^2n_2) \\ 2k^2(n_1-n_2) & 0 & -\frac{1}{n_1}-1-2k^2(1+n_1) & \frac{1}{n_2}+1+2k^2(1+n_2) \\ 2k^2[n_2-n_1+k^2n_1\times & 2k^2(n_1-n_2) & -2k^2n_1(1+n_1) & 2k^2n_2(1+n_2) \\ \times(1+n_1)-k^2n_2(1+n_2)] & & & \end{matrix}\right\|$$

Пример. Для летательного аппарата с параметрами $J_x=J_y=J_z=1$ *кГмсек*^{2}, $L=0{,}7$ *м*, $m^\alpha=-0{,}02$, $m_x^{\bar\omega_x}=m_z^{\bar\omega_z}=-0{,}004$, $\sigma_x=0{,}01$ *м*^{3}/*кГсек*^{2} проводилось численное интегрирование системы (1.1) и осредненной системы (1.11). В качестве начальных условий были приняты следующие: $V_0=7{,}75$ *км/сек*, $\theta_0=-3°$, $h_0=150$ *км*, $\alpha_0=\varphi_0=\psi_0=0$, $\omega_{x_0}=\omega_{y_0}=\omega_{z_0}=\Omega_0$.

h, км	Ω_0, сек$^{-1}$					
	0,2		0,5		0,8	
	(1,1)	(1,11)	(1,1)	(1,11)	(1,1)	(1,11)
70	54,0	54,6	85,9	85,9	114,5	114,7
50	30,7	31,0	48,0	48,1	62,6	62,6
30	27,0	27,2	41,9	42,0	54,7	54,7
10	44,0	44,5	69,4	69,4	91,9	92,0

В таблице приведены значения максимального угла атаки α_{max} (*град*) в зависимости от высоты полета h при различных Ω_0.

В рассматриваемом примере практически при полном совпадении численных решений на интегрирование осредненной системы (1.11) требуется в 10—20 раз меньше машинного времени по сравнению с численным интегрированием системы (1.1).

2. Рассмотрим функцию

$$J(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega\alpha_y^2\,dy. \tag{2.1}$$

В [1] показано, что при $f_z=0$ функция (2.1) является интегралом осредненной системы (1.11), а при $f_z\neq 0$ изменяет свою величину по закону

$$J(x,t)-J_0\exp\left(-\int_{t_0}^{t}f_z\,dt\right)=0, \tag{2.2}$$

где $J_0=J(x_0,t_0)$.

Уравнение (2.2) представляет собой неявное задание функции $x=\cos\alpha_{\max}$ от времени. Определим составляющие его левой части.

Вычислим начальное значение интеграла J_0. При отделении от космического объекта спускаемый аппарат получает некоторый начальный кинетический момент. Внешними моментами, действующими на аппарат на внеатмосферном участке, можно пренебречь. Вследствие этого вращение аппарата соответствует случаю Эйлера

$$\dot\alpha^2+\frac{(G_0-R_0\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}=H_0, \tag{2.3}$$

где R_0, G_0, H_0 соответствуют начальному моменту времени.

Запишем рассматриваемый интеграл в форме [1]

$$J(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}}\dot\alpha\,d\alpha. \tag{2.4}$$

Подставим в это выражение $\dot\alpha$ из (2.3) и проинтегрируем его:

$$J_0=2\left[\sqrt{H_0+R_0^2}-\max\left(|R_0|,\ |G_0|\right)\right]. \tag{2.5}$$

Интеграл $J(x,t)$ был ранее вычислен в (1.12)

$$J=\frac{2\beta}{\pi}\left[a_{11}K(k)+a_{12}E(k)+a_{13}\Pi\left(k,\frac{1}{n_1}\right)+a_{14}\Pi\left(k,\frac{1}{n_2}\right)\right]. \tag{2.6}$$

Получим $R(t)$ и $G(t)$, входящие в (2.6) посредством β, k, n_1, n_2.

Уравнение для $\dot R$ в (1.11) легко интегрируется в квадратурах

$$R=C_1\gamma_x,\quad \gamma_x=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}f_x\,dt\right). \tag{2.7}$$

При интегрировании последнего уравнения системы (1.11) воспользуемся методом последовательных приближений. В первом приближении возьмем решение для малых углов атаки [1]

$$G=R+C_2\gamma_z,\quad \gamma_z=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}f_z\,dt\right). \tag{2.8}$$

Здесь и в (2.7) C_1, C_2 — постоянные.

Во втором приближении решение будем искать для угла атаки, близкого к среднему за период колебания. В качестве такого угла может быть выбран угол атаки $\alpha_{\text{пр}}$, соответствующий регулярной прецессии аппарата вокруг оси $0x_c$.

При $J=0$ колебания угла атаки отсутствуют, $\alpha=\alpha_{\text{пр}}$. По мере возрастания величины интеграла J амплитуда колебаний угла атаки относительно $\alpha_{\text{пр}}$ увеличивается.

При регулярной прецессии $\dot\alpha=0$, $\ddot\alpha=0$, тогда из первого уравнения системы (1.1) во все время движения имеем

$$GR(1+\cos^2\alpha_{\text{пр}})-(G^2+R^2)\cos\alpha_{\text{пр}}+g\sin^4\alpha_{\text{пр}}=0.$$

Это же равенство получается из (1.9) при $u_2=x$.

Для плотных слоев атмосферы ($g \gg R^2, G^2$) из (1.9) приближенно получим

$$u_2 = 1 - \frac{(G-R)^2}{4g(1-x)} = x,$$

отсюда

$$\alpha_{\text{пр}} = \arccos\left(1 - \frac{|G-R|}{2\sqrt{g}}\right)$$

Таким образом найдена зависимость угла атаки от параметров движения при отсутствии колебаний.

Подставим в четвертое уравнение системы (1.11) решения (2.7), (2.8) и заменим в нем α на $\alpha_{\text{пр}}$, после чего проинтегрируем его

$$G = R + C_2\gamma_z + \frac{C_1|C_2|}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{(f_x - f_z)\gamma_x\gamma_z}{\sqrt{g}}\,dt. \tag{2.9}$$

3. В динамике спуска неуправляемых летательных аппаратов в атмосфере одной из наиболее важных является задача обеспечения по всей траектории полета условия

$$\alpha(t) \leqslant \alpha^*(t). \tag{3.1}$$

Предельная величина угла атаки $\alpha^*(t)$ по траектории выбирается исходя из условий защиты аппарата от аэродинамического нагрева, нормального ввода в действие парашютной системы мягкой посадки и т. д.

Весьма важно узнать, при каких начальных условиях и параметрах аппарата выполняется неравенство (3.1). Пусть $\eta_0 = \{\alpha_0, \varphi_0, \psi_0, \omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0}, V_0, \theta_0, h_0\}$ — вектор начальных условий движения, $W = \{J_x, J_z, L, m^\alpha, m_x^{\omega_x}, m_z^{\omega_z}, \sigma_x\}$ — вектор параметров аппарата, тогда совокупность значений η_0, W, удовлетворяющих неравенству (3.1), условимся называть областью $F(\eta_0, W) \leqslant 0$.

Известно [5], что справедливо равенство

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\Delta(x, t).$$

Тогда, используя выражение для $\Delta(x, t)$ из (1.12), получим

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{\max}} = \frac{4K(1-k^2)(u_2 - r)\beta}{\pi\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\partial J}{\partial \alpha_{\max}}$ сохраняет свой знак для любых $\alpha_{\max}$ из интервалов $(0, \pi)$. Иными словами, интеграл (2.1) является монотонной функцией аргумента $\alpha_{\max}$. В связи с этим, учитывая (2.2), условие (3.1) эквивалентно следующему:

$$F(\eta_0, W) = J_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} f_z\,dt\right) - J(\cos\alpha^*, t) \leqslant 0.$$

Подставляя формулы (2.5) и (2.6), перепишем это неравенство в виде

$$F(\eta_0, W) = [\sqrt{H_0 + R_0^2} - \max(|R_0|, |G_0|)]\exp\left(-\int_{t_0}^{t} f_z\,dt\right) -$$

$$-\frac{\beta}{\pi}\left[a_{11}K(k) + a_{12}E(k) + a_{13}\Pi\left(k, \frac{1}{n_1}\right) + a_{13}\Pi\left(k, \frac{1}{n_2}\right)\right] \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Здесь η, u_2 вычисляются по формулам из (1.9) при $x=\cos\alpha^*$. Таким образом, неравенство (3.3) определяет искомую область $F(\eta_0, W)\leqslant 0$.

Автор выражает благодарность В. В. Румянцеву за полезное обсуждение работы и ряд ценных замечаний.

Дата поступления
1 апреля 1975 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Е. Кузмак.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М., «Наука», 1970.
2. *В. В. Войеков, В. А. Ярошевский.* Уч. зап. ЦАГИ, *1*, № 3, 1970.
3. *Н. Н. Моисеев.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
4. *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш.* Специальные функции. М., Физматгиз, 1963.
5. *Ф. Л. Черноусько.* О резонансе в существенно нелинейной системе. ЖВМ и МФ, *3*, № 1, 131, 1963.