

УДК 531.38

© 1995 г. В. А. АСЛАНОВ, В. М. СЕРОВ

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ
ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА
С БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ
ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО МОМЕНТА

Рассматривается вращательное движение осесимметричного твердого тела под действием восстанавливающего момента при наличии малых возмущающих диссипативных силовых факторов. Восстанавливающий момент, действующий в плоскости угла нутации, представляется в виде нечетного ряда Фурье по этому углу, включающего две первые гармоники с медленно изменяющимися под влиянием возмущений коэффициентами. Производится построение усредненной системы первого приближения с использованием порождающего решения в эллиптических функциях, являющегося расширением известного аналитического решения для угла нутации в классическом случае Лагранжа [1]. В процессе эволюции рассматриваемой системы возможно явление пересечения фазовой траектории сепаратрисы, исследовавшееся также в [2, 3]. Рассмотрены различные варианты переходов между областями фазовой плоскости и получено условие устойчивости внешней и внутренних областей.

1. Уравнения вращательного движения твердого тела. Согласно теореме об изменении кинетического момента механической системы динамические уравнения движения твердого тела в векторной форме можно записать в виде

$$d\omega/dt = \|J\|^{-1} [M + (\|J\|\omega) \times \omega] \quad (1.1)$$

Здесь ω — вектор угловой скорости, M — вектор главного момента действующих на тело внешних сил, $\|J\|$ — тензор инерции тела, представленные в азисе связанной с телом системы координат $OXYZ$.

В случае динамической симметрии тела ($J_x = J_y = J$) векторное уравнение 1.1) в проекциях на связанные оси совместно с кинематическими уравнениями образует систему вида

$$\begin{aligned} \omega_x^* &= m_x + (1 - \mu) \omega_z \omega_y, & \omega_y^* &= m_y - (1 - \mu) \omega_z \omega_x, & \mu \omega_z^* &= m_z \\ \theta^* &= \omega_x \cos \varphi - \omega_y \sin \varphi, & \varphi^* &= \omega_z - (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) / \operatorname{tg} \theta \\ \psi^* &= (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) / \sin \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $m = (m_x, m_y, m_z) = M/J$, θ, ψ, φ — углы Эйлера, $\mu = J_z/J$ — отношение поперечного и осевого моментов инерции.

Будем предполагать, что внешний момент может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$m = m_\theta + \varepsilon m_\Delta \quad (1.3)$$

$$m_\theta = (m_\theta(\theta) \cos \varphi, -m_\theta(\theta) \sin \varphi, 0), \quad \varepsilon m_\Delta = (\varepsilon m_{\Delta x}, \varepsilon m_{\Delta y}, \varepsilon m_{\Delta z})$$

Здесь m_θ — вектор восстанавливающего момента, действующего в плоскости угла нутации, m_Δ — вектор возмущающего момента, ε — малый параметр. При

отсутствии возмущений ($m_{\Delta} = 0$) система (1.2) консервативна, а углы ψ и φ являются циклическими координатами. Обобщенные импульсы, соответствующие этим углам, являются первыми интегралами системы и будучи отнесенными к поперечному моменту инерции тела, записываются в виде

$$R = \mu\omega_z, \quad G = (\omega_z \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) \sin \theta + \mu\omega_z \cos \theta \quad (1.4)$$

При $m_{\Delta} \neq 0$ система (1.2) может не являться консервативной, если часть возмущающих факторов не относится к гамильтоновым.

Переходя от угловых скоростей к параметрам R, G, θ^* , в силу исходной возмущенной системы (1.2) уравнения движения можно записать в виде

$$R^* = \varepsilon m_{\Delta z}, \quad G^* = \varepsilon [(m_{\Delta x} \sin \varphi + m_{\Delta y} \cos \varphi) \sin \theta + m_{\Delta z} \cos \theta]$$

$$\theta^{**} + \frac{(G - R \cos \theta)(R - G \cos \theta)}{\sin^3 \theta} - m_{\theta}(\theta) = \varepsilon (m_{\Delta x} \cos \varphi - m_{\Delta y} \sin \varphi) \quad (1.5)$$

$$\varphi^* = \frac{R - G \cos \theta}{\sin^2 \theta} + R(\mu^{-1} - 1), \quad \psi^* = \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

2. Невозмущенное движение в случае бигармонической характеристики восстанавливающего момента. Предположим, что возмущающий момент отсутствует, а величина восстанавливающего момента следующим образом зависит от угла нутации

$$m_{\theta}(\theta) = a \sin \theta + b \sin 2\theta \quad (2.1)$$

где a, b — постоянные коэффициенты, на знаки которых никаких ограничений не накладывается (это означает, что момент m_{θ} может быть как опрокидывающим, так и восстанавливающим). Одной из характерных практических задач, приводящих к такому случаю, является задача о неуправляемом пространственном движении тела в атмосфере или иной сопротивляющейся среде.

С учетом (2.1) уравнение для угла нутации в системе (1.5) является независимым и имеет вид

$$\theta^{**} + F(\theta) = 0 \quad (2.2)$$

$$F(\theta) = (G - R \cos \theta)(R - G \cos \theta)/\sin^3 \theta - G \sin \theta - b \sin 2\theta \quad (2.3)$$

В невозмущенном движении функция Гамильтона для рассматриваемой консервативной системы постоянна и равна полной механической энергии, представляемой в виде

$$E = \theta'^2/2 + W(\theta) \quad (2.4)$$

$$W(\theta) = 0,5(G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta)/\sin^2 \theta + a \cos \theta + b \cos^2 \theta =$$

$$= 0,5(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \mu^2 \omega_z^2) + a \cos \theta + b \cos^2 \theta \quad (2.5)$$

Вводя новую переменную $u = \cos \theta$, уравнение (2.4) можно преобразовать к следующей форме

$$u'^2 = 2(1 - u^2)(E - au - bu^2) + 2GRu - G^2 - R^2 \equiv f(u) \quad (2.6)$$

где $f(u)$ — степенной полином 4-й степени. Два из четырех корней полинома $f(u)$ соответствуют амплитудным значениям угла нутации: $u_1 = \cos \theta_{\min}$, $u_2 = \cos \theta_{\max}$. Оставшиеся два корня могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. Возможные варианты l расположения корней представлены в таблице: для $l = 1-4$ все корни действительные, а для $l = 5$ корни действительные и комплексные.

l	b	u_1, u_2	u_3, u_4
1	$b > 0$		$u_3 \in [-\infty, -1], u_4 \in [+1, +\infty]$
2			$u_{3,4} \in [-\infty, -1], u_3 > u_4$
3	$b < 0$	$u_{1,2} \in [-1, +1]$	$u_{3,4} \in [+1, +\infty], u_3 > u_4$
4		$u_1 > u_2$	$u_{3,4} \in [-1, +1], u_3 > u_4$
5			$u_{3,4} = u_{34} \pm iv$

Разделяя переменные в уравнении (2.6) и затем интегрируя его, после ряда преобразований можно получить общее решение для угла нутации в виде

$$\cos \theta = u = L + \frac{M}{1 + N \operatorname{cn}^m(\beta t + \tau_0, k)} \quad (2.7)$$

Здесь cn — эллиптический косинус Якоби. Параметры L, M, N, β, k, m определяются в зависимости от типа корней полинома $f(u)$ по одному из двух вариантов

(а) четыре действительных корня ($m = 2$):

$$L = u_3, \quad M = u_1 - u_3, \quad N = (u_1 - u_2)/(u_2 - u_3) \quad (2.8)$$

$$k^2 = \frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_4)}{(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)}, \quad \beta = [-0,5b(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)]^{1/2}$$

(б) два действительных и два комплексных корня ($m = 1$):

$$L = \frac{u_2 - u_1 \xi}{1 - \xi}, \quad M = \frac{2\xi(u_1 - u_2)}{1 - \xi^2}, \quad N = -\frac{1 - \xi}{1 + \xi}$$

$$k = 0,5 [1 - \zeta/\eta], \quad \beta = (-2b\eta)^{1/2}$$

$$\xi = [(u_1 - u_{34})^2 + v^2]^{-1/2} [(u_2 - u_{34})^2 + v^2]^{1/2} \quad (2.9)$$

$$\eta = [(u_1 - u_{34})^2 + v^2]^{1/2} [(u_2 - u_{34})^2 + v^2]^{1/2}$$

$$\zeta = (u_1 - u_{34})(u_2 - u_{34}) + v^2$$

Величина τ_0 определяется из начальных условий

$$\tau_0 = F(\gamma_0, k), \quad \gamma_0 = -\operatorname{sign}(\theta_0) \arccos \left[\frac{L + M - \cos \theta_0}{N(\cos \theta_0 - L)} \right]^{1/m} \quad (2.10)$$

Здесь использовано обозначение F для неполного нормального эллиптического интеграла Лежандра первого рода.

3. Построение усредненной системы уравнений возмущенного вращательного движения. Будем в дальнейшем рассматривать два основных типа возмущающих факторов: малые диссипативные моменты и медленное изменение коэффициентов a и b тригонометрического двучлена (2.1). В этом случае нутационное движение тела может быть описано системой вида

$$z' = \varepsilon \Phi_z(\theta, z) \quad (3.1)$$

Здесь $z = (R, G, E, q)$ — вектор медленных переменных, q — вектор дополнительных медленных переменных (к их числу могут относиться, например, параметры движения центра масс). Предполагается, что зависимости коэффициентов $a(q)$ и $b(q)$ от этих параметров заранее известны. Функция Φ_E может

быть получена путем дифференцирования выражения (2.3) в силу возмущенной системы (1.5), а вид функций Φ_R , Φ_G непосредственно вытекает из первых двух уравнений этой системы. В результате можно получить

$$\begin{aligned} \varepsilon\Phi_R &= m_{\Delta z}, & \varepsilon\Phi_G &= [(m_{\Delta x} \sin \varphi + m_{\Delta y} \cos \varphi) \sin \theta + m_{\Delta z} \cos \theta] \\ \varepsilon\Phi_E &= \varepsilon [m_{\Delta x} \omega_x + m_{\Delta y} \omega_y + m_{\Delta z} \omega_z - \partial \left(\int m_\theta(\theta, q) d\theta \right) / \partial q \cdot \Phi_q(\theta, q)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пусть компоненты возмущающего момента m_Δ в связанной системе координат пропорциональны одноименным угловым скоростям

$$m_{\Delta x} = \kappa \omega_x, \quad m_{\Delta y} = \kappa \omega_y, \quad m_{\Delta z} = \lambda \omega_z \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в (3.2), получим

$$\varepsilon\Phi_R = \varepsilon \kappa (\lambda/\mu) R, \quad \varepsilon\Phi_G = \varepsilon \kappa [G + (\lambda/\mu - 1) R \cos \theta]$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\Phi_E &= \varepsilon [2\kappa (E - a(z) \cos \theta - b(z) \cos^2 \theta + (\lambda/\mu - 1) R^2) - \\ &- (a'(q) \cos \theta + b'(q) \cos^2 \theta) \Phi_q(\theta, q)] \end{aligned}$$

$$a'(q) = \partial a(q) / \partial q, \quad b'(q) = \partial b(q) / \partial q \quad (3.4)$$

Применив к системе (3.1) оператор усреднения вдоль порождающего решения, можно с учетом (3.4) получить усредненную систему первого приближения следующего вида

$$z' = \varepsilon \langle \Phi_z \rangle \quad (3.5)$$

$$\varepsilon \langle \Phi_R \rangle = \varepsilon \kappa (\lambda/\mu) R, \quad \varepsilon \langle \Phi_G \rangle = \varepsilon \kappa [G + (\lambda/\mu - 1) R \langle \cos \theta \rangle]$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \langle \Phi_E \rangle &= \varepsilon [2\kappa (E - a(q) \langle \cos \theta \rangle - b(q) \langle \cos^2 \theta \rangle + (\lambda/\mu - 1) R^2) - \\ &- a'(q) \langle \cos \theta \cdot \Phi_q(\theta, q) \rangle - b'(q) \langle \cos^2 \theta \cdot \Phi_q(\theta, q) \rangle] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\langle \Phi_z(\theta) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_z(\theta(t), z) dt \quad (3.7)$$

где T — мгновенный период колебаний угла нутации, $\theta(t)$ — выражение порождающего решения (2.9). Очевидно, величины $\langle \cos \theta \rangle$ и $\langle \cos^2 \theta \rangle$ определяются следующим образом

$$\langle \cos \theta \rangle = L + MJ_1; \quad \langle \cos^2 \theta \rangle = L^2 + 2LMJ_1 + M^2 J_2 \quad (3.8)$$

$$J_i = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{[1 + N \operatorname{cn}^m(\beta t + \tau_0, k)]^i} \quad (i = 1, 2) \quad (3.9)$$

Вычислить интегралы (3.9) можно посредством замены вида

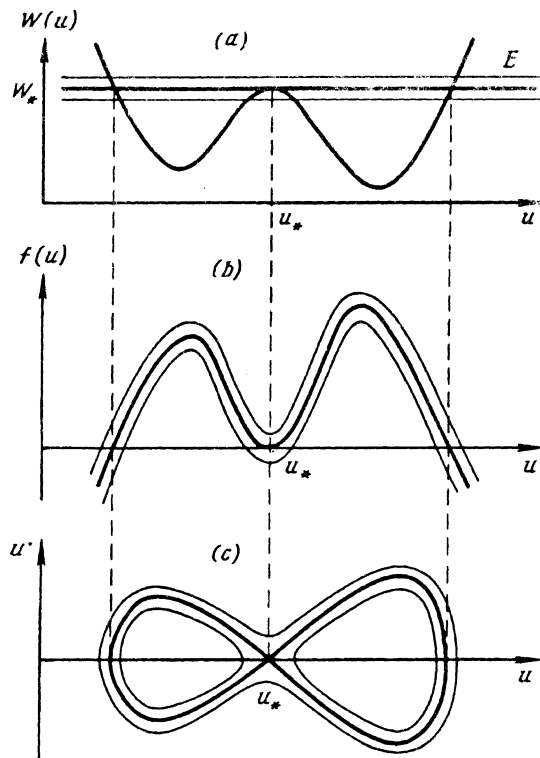
$$\gamma = \operatorname{am}(\beta t + \tau_0, k), \quad dt = \frac{1}{\beta} \frac{d\gamma}{(1 - k^2 \sin^2 \gamma)^{1/2}} \quad (3.10)$$

где am — амплитуда Якоби.

В случае, когда все корни полинома $f(u)$ действительные ($m = 2$), с учетом (3.9) после ряда преобразований можно получить для J_1, J_2 :

$$J_1 = (1 + w) \frac{\Pi(w, k)}{K(k)}, \quad w = -\frac{N}{1 + N}$$

$$J_2 = \frac{1 + w}{2} \left[\left(\frac{(1 + w)(2k^2 + w)}{k^2 + w} + 1 \right) \frac{\Pi(w, k)}{K(k)} + \frac{w}{k^2 + w} \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right]$$



Фиг. 1

Если полином $f(u)$ имеет комплексные корни, интегралы J_1, J_2 определяются следующим образом

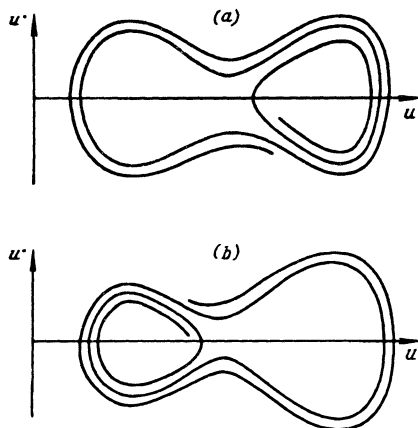
$$J_1 = (1 + w) \frac{\Pi(w, k)}{K(k)}, \quad w = \frac{N^2}{1 - N^2}$$

$$J_2 = (1 + w) \left[\frac{(1 + w)(2k^2 + w)}{k^2 + w} \frac{\Pi(w, k)}{K(k)} + \frac{w}{k^2 + w} \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right]$$

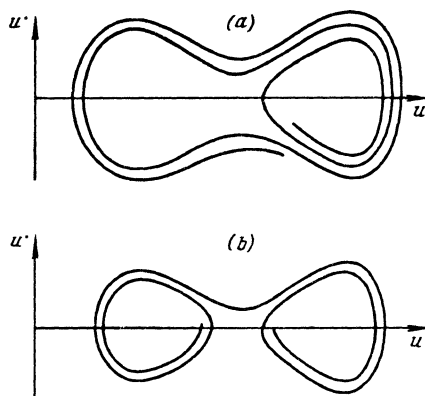
где $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(w, k)$ — полные нормальные эллиптические интегралы соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода.

4. Особенности движения тела с двумя устойчивыми положениями равновесия. При $b < 0$, $|b| > 0,5|a|$ рассматриваемая система может иметь неустойчивое положение равновесия $\theta^* = \arccos(-0,5a/b)$, которому на фазовом портрете системы соответствует седловая особая точка (фиг. 1). Сепаратриса разбивает фазовую плоскость рассматриваемой системы на три области: внешнюю и две внутренних. Нахождение изображающей точки на сепаратрисе соответствует граничному случаю между типами корней $l = 4$ и $l = 5$ в таблице.

Движение по сепаратрисе имеет бесконечно большой период колебания в связи с асимптотическим замедлением вблизи седловой точки, что соответствует параметрическому резонансу $\omega_0 = 0$. Под действием возмущений в процессе эволюции системы фазовая траектория начавшись в одной из трех областей может продолжаться в другой, пересекая при этом сепаратрису. Как при любом другом резонансном явлении, внешне это характеризуется качественным изменением характера движения, в частности разрывом огибающей угла нутации.



Фиг. 2



Фиг. 3

Результаты численного моделирования показывают, что в некоторых случаях попадание изображающей точки в ту или иную область определяется начальной фазой колебания угла нутации (фиг. 2). Так как в усредненных уравнениях (3.5) присутствуют только медленные параметры, это событие может рассматриваться как случайное [2, 3]. Однако при определенных условиях движение всегда продолжается в одной и той же области независимо от фазы (фиг. 3). Поэтому представляется важным в момент перехода между вариантами корней 4 и 5 проведение анализа устойчивости всех трех областей.

Если во внутренней области значение полинома $f(u)$ в точке минимума f_* уменьшается, то данная область может рассматриваться как устойчивая. В противном случае область является неустойчивой, и ни при каких начальных условиях фазовая траектория в нее не попадет. Аналогично, внешняя область будет устойчивой, при возрастании величины f_* и неустойчивой — при ее уменьшении.

Для соответствующего анализа устойчивости областей целесообразно вычислить полную производную по времени экстремального значения f_* :

$$f_*' = \sum_z \frac{\partial f(u_*, z)}{\partial z} \Phi_z \quad (4.1)$$

При постоянных коэффициентах a и b выражение (4.1) с учетом (2.6), (3.6) принимает вид

$$f_*' = 2\epsilon \kappa [f_* + R(Ru_* - G)(\lambda/\mu - 1)(\langle u \rangle - u_*) - 2(1 - u_*^2)[a(\langle u \rangle - u_*) + b(\langle u^2 \rangle - u_*^2)]] \quad (4.2)$$

Движение может начинаться как во внешней, так и в любой из внутренних областей. Если эта область неустойчива, то фазовая траектория приближается к сепаратрисе и пересекает ее. После этого движение может происходить только в устойчивой области, причем если таких областей две, то попадание в любую из них определяется начальной фазой колебания угла нутации. На фиг. 2 показан случай, когда внешняя область неустойчива, а обе внутренние устойчивы, а на фиг. 3 — когда устойчива одна из внутренних областей, а вторая внутренняя и внешняя неустойчивы.

Таким образом, на основе анализа устойчивости областей фазовой плоскости системы (3.1) можно построить алгоритм моделирования вращательного движения твердого тела при наличии двух устойчивых и промежуточного неустойчивого положений равновесия. Если считать начальную фазу колебания угла нутации

произвольной, то в случае наличия двух устойчивых областей попадание в каждую из них носит случайный характер. Однако это не означает, что в данном случае решением проблемы может стать использование полных уравнений (1.2) или (1.5) для моделирования движения тела. Если пересечение сепаратрисы происходит вблизи седла, то область продолжения движения будет определяться вычислительными погрешностями и зависеть например, при прочих равных условиях от шага интегрирования. Поэтому применение усредненных уравнений для моделирования вращательного движения твердого тела рассматриваемого класса может оказаться более предпочтительным, особенно на длительных интервалах времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серов В. М. Вращательное движение динамически симметричного твердого тела под действием нелинейного момента//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 26—31.
2. Нейштадт А. И. Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 30—36.
3. Нейштадт А. И. Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром//ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 621—632.

Самара

Поступила в редакцию
22.03.1993