

УДК 531.36

© 1998 г. В.С. АСЛАНОВ, И.А. ТИМБАЙ

**ИНТЕГРАЛ ДЕЙСТВИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА
В ОБОБЩЕННОМ СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА**

Под обобщенным случаем Лагранжа в данной работе понимается движение осесимметричного твердого тела под действием медленно меняющихся во времени бигармонического нутационного момента, который имеет вид нечетного ряда Фурье по углу нутации с двумя первыми гармониками, и малых возмущающих моментов. На основе анализа фазовых портретов установлены особенности движения, для всех возможных случаев движения получены аналитические формулы для интеграла действия, выраженные через полные эллиптические интегралы. На основе полученных аналитических формул предложена процедура анализа переходных режимов возмущенного движения. Рассмотрен пример исследования переходных режимов плоского движения тела, в котором вращательное движение переходит в одно из возможных колебательных движений. Определен момент перехода через сепаратрису, граничные условия движения и вероятность попадания в ту или иную колебательную область.

1. Уравнения движения. Бигармонический нутационный момент. Рассмотрим возмущенное движение свободного твердого тела, близкого к динамически симметричному, относительно системы координат, которая имеет начало в центре масс тела и движется поступательно. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{p} + (\mu - 1)qr &= m_0(\theta, z) \cos \varphi + \varepsilon m_1(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, z) \\ \dot{q} + (1 - \mu)pr &= -m_0(\theta, z) \sin \varphi + \varepsilon m_2(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, z) \\ \mu \dot{r} &= \varepsilon m_3(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, z), \quad \dot{\psi} = (p \sin \varphi + q \cos \varphi) / \sin \theta \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) / \operatorname{tg} \theta, \quad \dot{z} = \varepsilon \Phi_z(\theta, z) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь динамические уравнения Эйлера записаны в проекциях на главные оси инерции тела; p, q, r – проекции вектора угловой скорости на эти оси; ψ, θ, φ – углы Эйлера (угол прецессии, угол нутации, угол собственного вращения); z – вектор медленных переменных (к их числу могут относиться, например, параметры движения центра масс); $\mu = C/A$ – отношение экваториального и осевого моментов инерции тела относительно центра масс; m_0 – внешний момент, действующий в плоскости угла нутации, отнесенный к экваториальному моменту инерции; εm_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции вектора возмущающих моментов на главные оси инерции тела, отнесенные к экваториальному моменту инерции; ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений.

Пусть величина внешнего момента определяется бигармонической зависимостью от угла нутации

$$m_0(\theta, z) = a(z) \sin \theta + b(z) \sin 2\theta \quad (1.2)$$

где $a(z)$, $b(z)$ – медленно меняющиеся коэффициенты, на знаки которых никаких ограничений не накладывается (нутационный момент m_θ может быть как опрокидывающим, так и восстанавливающим).

Под обобщенным случаем Лагранжа будем понимать движение твердого тела под действием медленно меняющихся во времени нутационного момента (1.2) и малых возмущающих моментов. При $b = 0$, $a > 0$ и $\epsilon = 0$ имеет место движение тяжелого твердого тела в случае Лагранжа в классической постановке [1]. Исследованию движения тяжелого твердого тела под действием дополнительных малых возмущающих моментов посвящена работа [2]. Предлагаемый обобщенный случай характерен для ряда практических задач, одна из которых рассмотрена в [3]. В [3, 4] получено общее решение уравнений движения для невозмущенного случая ($\epsilon = 0$), построены усредненные движения при действии малых диссипативных моментов, а также исследованы переходные режимы на основе анализа эволюций фазовых портретов системы.

Данная работа посвящена нахождению аналитических выражений для интеграла действия [5] в обобщенном случае Лагранжа, которые эффективно могут быть использованы для анализа возмущенного движения тела [6, 7].

Система (1.1) в невозмущенном движении ($\epsilon = 0$) имеет три первых интеграла [3]:

$$G = (p \sin \phi + q \cos \phi) \sin \theta + \mu r \cos \theta, \quad R = \mu r \quad (1.3)$$

$$E = 0,5(p^2 + q^2 + \mu^2 r^2) + a \cos \theta + b \cos^2 \theta = h \quad (1.4)$$

Здесь R , G – отнесенные к экваториальному моменту инерции проекции вектора кинетического момента на ось динамической симметрии и на ось, от которой отсчитывается угол нутации; E – полная энергия. Интеграл энергии (1.4) через R , G можно переписать в виде

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} + a \cos \theta + b \cos^2 \theta = h \quad (1.5)$$

Воспользуемся одной из форм записи интеграла действия [6]:

$$I = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \dot{\theta} d\theta \quad (1.6)$$

где θ_{\min} , θ_{\max} – амплитудные значения угла нутации (при плоском вращении $\theta_{\min} = -\pi$, $\theta_{\max} = \pi$).

Найдем аналитическое выражение для интеграла действия. Произведем замену переменных $u = \cos \theta$ в формуле (1.5) и в интеграле действия (1.6), который после этого примет вид

$$I = -m \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2} du \quad (1.7)$$

$$f(u) = \dot{u}^2 = 2bu^4 + 2au^3 - 2(b+h)u^2 - 2(a-RG)u + (2h-R^2-G^2) \quad (1.8)$$

где $u_1 = \cos \theta_{\min}$, $u_2 = \cos \theta_{\max}$ (при плоском вращении: $u_1 = 1$, $u_2 = -1$; при плоских колебаниях относительно $\theta = 0$: $u_1 = 1$, $u_2 = \cos \theta_{\max}$, относительно $\theta = \pi$: $u_1 = \cos \theta_{\min}$, $u_2 = -1$).

Параметр m в формуле (1.7) соответствует следующим значениям: $m = 2$ – при плоском вращении, плоских колебаниях относительно $\theta = 0$, π ; $m = 1$ – при всех остальных случаях.

Интеграл (1.7) относится к классу эллиптических интегралов и, следовательно, приводится к сумме элементарных функций и трех так называемых нормальных

эллиптических интегралов [8]. Результат интегрирования зависит от типа корней полинома четвертой степени $f(u)$. Для реализации реального физического процесса два из четырех корней многочлена (1.8) должны соответствовать предельным значениям угла нутации $u_1 = \cos\theta_{\min}$, $u_2 = \cos\theta_{\max}$, при достижении которых $\dot{u} = 0$. При этом $[u_2, u_1] \in [-1, +1]$. Оставшиеся два корня u_3, u_4 в зависимости от соотношения величин h, a, b, R и G могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. Введем следующее правило нумерации этих корней. Действительные корни: при $b < 0 - u_3 > u_4$, при $b > 0 - u_3 < u_4$. Комплексно-сопряженные корни: $u_{3,4} = u_{3,4} \pm iw$.

Рассмотрим сначала частный случай движения – плоский, который реализуется при $R = 0$ и $G = 0$. В зависимости от типа корней полинома $f(u)$ будет зависеть результат взятия квадратуры (1.7). Так в случае, когда все корни действительные, проведение элементарных преобразований и использование стандартных схем приведения эллиптических интегралов из [8] дают следующий результат

$$I_1 = m\eta \left\{ hK(k) - a[\lambda K(k) + v\Pi(n, k)] - b \left[(\lambda^2 - 0,5v^2 / (1+n))K(k) + \left(\frac{0,5v^2 n}{(1+n)(k^2 + n)} \right) E(k) + \left(0,5v^2 \left(\frac{n+2k^2}{k^2 + n} + \frac{1}{1+n} \right) + 2\lambda v \right) \Pi(n, k) \right] \right\} \quad (1.9)$$

где $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(n, k)$ – полные эллиптические интегралы I, II и III рода; $k = [(u_3 - u_4)(u_2 - u_1) / (u_3 - u_1)(u_2 - u_4)]^{1/2}$ – модуль эллиптических интегралов, $n = (u_2 - u_1) / (u_1 - u_3)$, $\eta = 4 / \sqrt{-2b(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)}$, $\lambda = u_3$, $v = (u_2 - u_3)$.

Пусть теперь в плоском случае движения имеют место два действительных и два комплексных корня ($u_{3,4} = u_{3,4} \pm iw$), тогда интеграл действия примет вид

$$I_1 = m\eta \left\{ hK(k) - a[\lambda K(k) + v(1+n)\Pi(n, k)] - b \left[(\lambda^2 - v^2(1+n))K(k) + \left(\frac{v^2(1+n)n}{k^2 + n} \right) E(k) + (1+n) \left(\frac{v^2(1+n)(n+2k^2)}{k^2 + n} + 2\lambda v \right) \Pi(n, k) \right] \right\} \quad (1.10)$$

$$k = [0,5(1 - \zeta / \vartheta)]^{1/2}, \quad n = (\xi - 1)^2 / (4\xi), \quad \eta = 4 / \sqrt{-2b\vartheta}$$

$$\zeta = (u_1 - u_{34})(u_2 - u_{34}) + w^2, \quad \vartheta = [(u_1 - u_{34})^2 + w^2]^{1/2} [(u_2 - u_{34})^2 + w^2]^{1/2}$$

$$\xi = [(u_1 - u_{34})^2 + w^2]^{-1/2} [(u_2 - u_{34})^2 + w^2]^{1/2}, \quad \lambda = (u_1 \xi - u_2) / (\xi - 1)$$

$$v = 2\xi(u_2 - u_1) / (\xi^2 - 1)$$

Перейдем к рассмотрению общего случая пространственного движения твердого тела под действием бигармонического нутационного момента (1.2). Пусть все корни полинома $f(u)$ действительные. Используя формулу (1.9), интеграл действия (1.7) можно привести к виду

$$I_2 = I_1 - \sum_{i=1}^2 0,5d_i [\lambda_i K(k) + (v_i - \lambda_i) \Pi(n_i, k)] \quad (1.11)$$

$$d_{1,2} = 0,5(R \mp G)^2, \quad n_{1,2} = (u_2 - u_1)(1 \mp u_3) / (u_1 - u_3) / (1 \mp u_2)$$

$$\lambda_{1,2} = 1 / (1 \mp u_3), \quad v_{1,2} = 1 / (1 \mp u_2)$$

Если имеют место два действительных и два комплексных корня, то с учетом формулы (1.10) можно получить следующее выражение для интеграла действия

$$I_2 = I_1 - \sum_{i=1}^2 0,5d_i[\lambda_i K(k) + v_i(1+n)\Pi(n_i, k)] \quad (1.12)$$

$$n_{1,2} = (\xi - 1 \pm u_2 \mp \xi u_1)^2 / [4\xi(1 \mp u_1 \mp u_2 + u_1 u_2)]$$

$$\lambda_{1,2} = (\xi - 1) / (\xi - 1 \pm u_2 \mp \xi u_1), \quad v_{1,2} = (1 + \xi) / (1 + \xi \mp u_2 \mp \xi u_1) - \lambda_{1,2}$$

Таким образом, в общем пространственном случае движения интеграл действия зависит от пяти полных эллиптических интегралов: одного – первого рода, одного – второго рода и трех интегралов третьего рода.

С целью проверки полученных аналитических формул для интеграла действия были проведены расчеты, в которых сравнивались значения интеграла действия, вычисленного по исходной формуле (1.6), и по формулам (1.9)–(1.12). Расчеты показали совпадение результатов с данными численного интегрирования (1.6).

2. Синусоидальный нутационный момент. Рассмотрим частный случай. Путь нутационный момент представляет собой синусоидальную зависимость от угла нутации (в (1.2) коэффициент $b = 0$) $m_\theta(\theta) = a \sin \theta$.

При $b = 0$ функция $f(u)$ становится полиномом третьей степени

$$f(u) = \dot{u}^2 = 2au^3 - 2hu^2 - 2(a - RG)u + (2h - R^2 - G^2) \quad (2.1)$$

Физическое движение реализуется, когда все корни кубического полинома действительные [9]. Нумерацию корней будем проводить следующим образом:

при $a < 0$: $u_1 > u_2 > u_3$ ($u_1 = \cos \theta_{\min}$, $u_2 = \cos \theta_{\max}$)

при $a > 0$: $u_1 < u_2 < u_3$ ($u_1 = \cos \theta_{\max}$, $u_2 = \cos \theta_{\min}$)

При плоском движении твердого тела ($R = G = 0$) имеет место следующая формула для интеграла действия

$$I_1 = m\eta\{hK(k) - a[\lambda K(k) + vE(k)]\}, \quad k = [(u_1 - u_2)/(u_1 - u_3)]^{1/2} \quad (2.2)$$

$$\eta = 4 / \sqrt{-2a(u_1 - u_3)}, \quad \lambda = u_3, \quad v = (u_1 - u_3)$$

При плоском вращении ($h > |a|$): $m = 2$, $u_3 = h/a$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ при $a < 0$; $u_1 = -1$, $u_2 = 1$ при $a > 0$. Формула для интеграла действия (2.2) принимает вид

$$I_1 = 4\sqrt{2(h + |a|)E(k)} \quad (2.3)$$

или [10]:

$$I_1 = [8\sqrt{|a|}/k]E(k), \quad k = [2|a|/(h + |a|)]^{1/2}$$

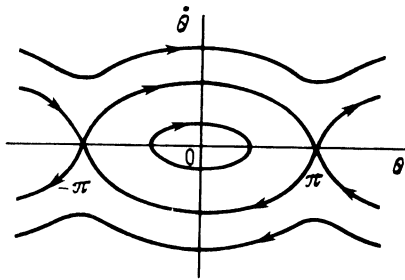
При плоских колебаниях ($h < |a|$): $m = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = h/a$, $u_3 = -1$ при $a < 0$; $u_1 = -1$, $u_2 = h/a$, $u_3 = 1$ при $a > 0$. Интеграл действия определяется формулой

$$I_1 = [4\sqrt{|a|}]\{(h - |a|)K(k) + 2|a|E(k)\} \quad (2.4)$$

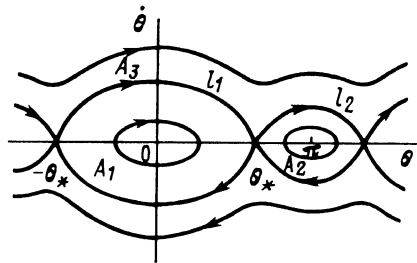
или [10]:

$$I_1 = 8\sqrt{|a|}\{(k^2 - 1)K(k) + E(k)\}$$

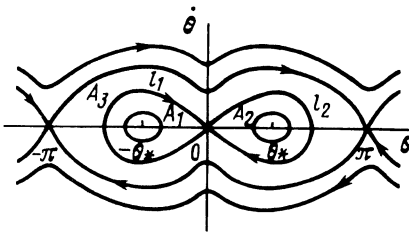
$$k = [0,5(1 + h/|a|)]^{1/2} \text{ или } k = \sin(\theta_{\max}/2) \text{ при } a < 0; k = \cos(\theta_{\min}/2) \text{ при } a > 0$$



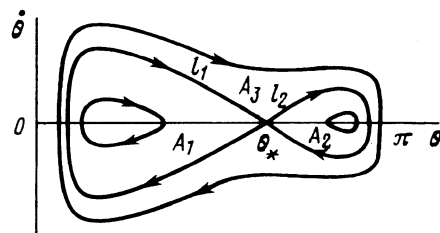
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

В случае пространственного движения тела под действием синусоидального нутационного момента имеет место следующая формула для интеграла действия

$$I_2 = I_1 - \sum_{i=1}^2 0,5d_i\lambda_i\Pi(n_i, k) \quad (2.5)$$

$$n_{1,2} = (u_2 - u_1)(u_1 \mp 1), \quad \lambda_{1,2} = 1/(1 \mp u_1)$$

Если в качестве независимого параметра принять корень многочлена (2.1) u_2 (при $a < 0$ $u_2 = \cos\theta_{\max}$, при $a > 0$ $u_2 = \cos\theta_{\min}$), то два других корня u_1 , u_3 и интеграл энергии h можно выразить через параметры R , G , a и u_2 :

$$h = 0,5(G^2 + R^2 - 2GRu_2)/(1 - u_2^2) + au_2$$

$$u_{1,3} = (d_3 - d_4u_2)/(1 - u_2^2) \mp \text{sign}(a)D$$

$$d_3 = R^2 + G^2/(4a), \quad d_4 = RG/(2a)$$

$$D = [1 + 2(d_3u_2 - d_4)/(1 - u_2^2) + (d_3 - d_4u_2)^2/(1 - u_2^2)^2]^{1/2}$$

Интеграл действия, выраженный через параметры R , G , a и u_2 , получен в [11].

При движении твердого тела в случае, когда нутационный момент равен нулю ($a = b = 0$, движение динамически симметричного тела в случае Эйлера), интеграл действия можно вычислить по формуле [11] $I_2 = \pi[\sqrt{2h} - \max(|R|, |G|)]$.

3. Фазовые портреты системы. Тип движения твердого тела в обобщенном случае Лагранжа под действием бигармонического нутационного момента определяется соотношением величин a , b , R , G и h .

При плоском движении ($R = G = 0$) имеют место три характерных вида фазовых портретов.

1. $|b| \leq 0,5|a|$. Фазовый портрет аналогичен фазовому портрету математического маятника и для случая $a < 0$ изображен на фиг. 1 (при $a > 0$ фазовая картина сдвинута по оси θ на величину π).

2. $|b| > 0,5|a|$, $b < 0$. На фазовом портрете появляются дополнительные особые точки типа седло, соответствующие значениям угла нутации $\theta_* = \pm \arccos(-0,5a/b) + 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), и имеют место три области движения: вращательная и две колебательные (фиг. 2).

3. $b > 0,5|a|$, $b > 0$. Фазовый портрет для случая $a < 0$ изображен на фиг. 3 (при $a > 0$ фазовая картина сдвинута по оси θ на величину π). Здесь значениям угла нутации $\theta_* = \pm \arccos(-0,5a/b) + 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствуют особые точки типа центр, а в точках $\theta = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет место седло. На фазовом портрете располагаются четыре характерные области движения – вращательная и три колебательные.

В пространственном случае наличие гироскопического члена в выражении для интеграла энергии (1.5) исключает возможность вращательного движения. Вторая гармоника в бигармоническом моменте (1.2) обуславливает возможность появления на фазовом портрете особой точки типа седло. В этом случае имеют место три колебательные области (фиг. 4). Качественный анализ уравнения (1.5) показывает, что если внутри интервала для угла нутации $(0, \pi)$ седловая точка отсутствует в плоском случае ($R = G = 0$), то она отсутствует и в случае пространственных колебаний независимо от величин R и G . С другой стороны, если при $R = G = 0$ седловая точка имеет место (случай $|b| > 0,5|a|$, $b < 0$), то обеспечить ее отсутствие можно только набором достаточно больших по модулю R и G .

4. Исследование переходных режимов движения. В возмущенном движении с изменением величин коэффициентов a и b и наличием возмущающих моментов происходит эволюция фазовых траекторий, в результате которой они могут пересекать сепаратрисы, попадая в различные области фазового портрета. Это явление сопровождается качественными изменениями характера движения: вращательное движение может переходить в колебательное, колебательное движение "скачкообразно" – в колебательное движение с другими амплитудными характеристиками и так далее.

Пусть коэффициенты a и b медленно изменяются во времени, а возмущающие моменты отсутствуют. Как известно, для таких систем интеграл действия сохраняет свое значение [5]. Равенство $I = \text{const}$ справедливо для большинства начальных условий с точностью $O(\epsilon \ln \epsilon)$ на временах порядка $1/\epsilon$ [7]. Исключительное множество начальных условий, для которых эта оценка несправедлива, имеют меру $O(\epsilon^n)$, где $n \geq 1$ – любое наперед заданное число. Режимы движения, соответствующие данным начальным условиям, в настоящей работе не рассматриваются (применительно к задаче о неуправляемом пространственном движении твердого тела в атмосфере они подробно исследованы в [12]).

Предлагается следующая процедура исследования переходных режимов движения тела без интегрирования уравнений движения, используя только аналитические выражения для интеграла действия.

Исходя из постоянства интеграла действия, моменты времени, соответствующие переходам между различными областями фазового портрета, определяются из равенства выражения интеграла действия, вычисленного вдоль сепаратрис, значению интеграла действия, вычисленного по начальным условиям движения.

Величина угла нутации на границе перехода от одного типа движения к другому в общем случае зависит от распределения начальных углов нутации и угловых скоростей на момент $t = 0$, а также от скорости изменения коэффициентов a и b . Полагается, что за время движения до границы перехода тело совершает несколько оборотов или колебаний, поэтому угол нутации можно считать случайной величиной равномерно распределенной в рассматриваемом диапазоне. При этом величина угловой скорости $\dot{\theta}$ определяется из интеграла энергии (1.5).

В случаях, когда при пересечении сепаратрис фазовая точка может попадать в различные колебательные области, возникает задача выбора области продолжения

движения. Пусть сепаратрисы l_1 и l_2 отделяют внутренние области движения A_1, A_2 от внешней A_3 (см. фиг. 2, 3, 4). Для выбора области продолжения движения A_1 или A_2 используется понятие вероятности P_i ($i = 1, 2$), захвата в каждую из них. В соответствии с [13] эта вероятность определяется как доля фазового объема малой окрестности начальной точки движения, "захватываемая" в рассматриваемую область в пределе, когда малый параметр $\epsilon \rightarrow 0$ и размер окрестности $\delta \rightarrow 0$, $\epsilon \ll \delta$ (сначала предел берется по ϵ потом по δ), причем $P_1 + P_2 = 1$. Отношение вероятностей вычисляется по формулам

$$P_1/P_2 = \Theta_1/\Theta_2 \quad (4.1)$$

$$\Theta_i = -\oint_{l_i} \frac{\partial[E(\theta, \theta, z) - E(0, \theta_*, z)]}{\partial z} \Phi_z dt \quad (i = 1, 2) \quad (4.2)$$

где $\theta = 0$, $\theta = \theta_*$ – координаты седловой особой точки на фазовом портрете. Интегралы (4.2) вычисляются вдоль сепаратрис l_1 и l_2 , параметризованных временем t невозмущенного движения по ним.

Итак, при известных начальных условиях движения можно проследить за эволюцией фазовой траектории, найти моменты перехода и вероятность перехода в ту или иную характерную область фазового портрета, определить для нее граничные условия движения.

5. Пример. Рассмотрим плоское движение твердого тела, когда $|b| > 0,5|a|$, $b < 0$. Фазовый портрет показан на фиг. 2. Коэффициент a может принимать как положительные, так и отрицательные значения. При $h > a^2/(-4b)$ реализуется вращательное движение твердого тела, которому соответствуют два действительных и два комплексно-сопряженных корня полинома: $u_{1,2} = \pm 1$, $u_{3,4} = u_{34} \pm iw$, где $u_{34} = -0,5a/b$, $w = [(0,5a/b)^2 + h/b]^{1/2}$.

Интеграл действия (1.10) в этом случае имеет вид

$$I = 2\eta\{hK(k) - |a|(1 + 1/n)^{1/2}[K(k) - \Pi(n, k)] - b[K(k) + (E(k) - (1 + n)\Pi(n, k))/(k^2 + n)]\} \quad (5.1)$$

$$k = [0,5 - (h + b)/(cs)]^{1/2}, \quad n = (s - c)^2/(4sc), \quad \eta = 4/(cs)^{1/2} \quad c, s = [2(h \mp a - b)]^{1/2}$$

Колебательному движению относительно точки $\theta = 0$ ($\theta < \theta_* = \arccos(-0,5a/b)$) соответствует условие $(a + b) < h < a^2/(-4b)$, а колебаниям относительно точки $\theta = \pi$ ($\theta > \theta_*$) соответствует условие $(-a + b) < h < a^2/(-4b)$. При этих условиях все корни полинома (1.8) действительные. При колебаниях относительно точки $\theta = 0$, корни определяются следующими формулами:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -0,5a/b + [(0,5a/b)^2 + h/b]^{1/2} \\ u_3 = \max[-1, -0,5a/b - [(0,5a/b)^2 + h/b]^{1/2}] \quad (5.2)$$

$$u_4 = \min[-1, -0,5a/b - [(0,5a/b)^2 + h/b]^{1/2}]$$

При колебаниях относительно точки $\theta = \pi$:

$$u_1 = -0,5a/b - [(0,5a/b)^2 + h/b]^{1/2}, \quad u_2 = -1 \\ u_3 = \max[1, -0,5a/b + [(0,5a/b)^2 + h/b]^{1/2}] \quad (5.3)$$

$$u_4 = \min[1, -0,5a/b + [(0,5a/b)^2 + h/b]^{1/2}]$$

Интеграл действия, соответствующий этим корням, определяется формулой (1.9). Границе перехода между областями фазовой плоскости соответствует условие $h = a^2/(-4b)$. На границе перехода в момент времени $t = t_*$ интеграл действия, взятый вдоль сепаратрис, имеет вид

$$I_* = 4\sqrt{-2b_*} [\sin \theta_* + (0,5\pi - \theta_*) \cos \theta_*], \quad \theta_* = \arccos(-0,5a_*/b_*) \quad (5.4)$$

При известном законе изменения коэффициентов $a = a(t)$, $b = b(t)$ момент времени $t = t_*$ можно определить, приравнявая выражение для интеграла действия взятого вдоль сепаратрис (5.4) значению интеграла действия, вычисленного через начальные условия движения по формулам (5.1) или (1.9) с учетом (5.2) или (5.3), в зависимости от нахождения фазовой точки в той или иной области фазового портрета, соответственно, области A_3, A_1, A_2 .

Для определенности будем полагать, что коэффициенты a и b изменяются по экспоненциальному закону (такой закон имеет место в задаче о входе неуправляемого твердого тела в атмосферу [12]):

$$a = a_0 z, \quad b = b_0 z, \quad z = \exp(\beta t) \quad (5.5)$$

где a_0 и b_0 значения коэффициентов a и b при $t = 0$, β – положительный коэффициент порядка малости ϵ . Пусть начальные условия соответствуют вращательному движению тела (область A_3), тогда интеграл действия I_0 вычисляется по формуле (5.1). Приравнявая значение I_0 значению I_* из (5.4), получим коэффициент b в момент времени $t = t_*$:

$$b_* = -[I_0 / (\sin \theta_* + (0,5\pi - \theta_*) \cos \theta_*)]^2 / 32, \quad \theta_* = \arccos(-0,5a_0/b_0).$$

Время, соответствующее моменту перехода вращения в колебания, определяется при известном b_* из соотношений (5.5) $t_* = \ln[b_*/b_0]/\beta$.

После пересечения сепаратрисы при $t > t_*$ система может совершать колебания относительно одного из двух устойчивых положений равновесия $\theta = 0$ (в области A_1) или $\theta = \pi$ (в области A_2). Найдем вероятность попадания в эти колебательные области. Будем обозначать вероятность попадания в область A_1 через P_1 , а вероятность попадания в область A_2 через P_2 . Естественно, что $P_1 + P_2 = 1$. Из формул (4.1) и (4.2) имеем

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 - \theta_* \operatorname{ctg} \theta_*}{1 + (\pi - \theta_*) \operatorname{ctg} \theta_*}, \quad \theta_* = \arccos\left(-\frac{0,5a_*}{b_*}\right)$$

Отсюда следует, что величина вероятности попадания тела в ту или иную колебательную область определяется только значением неустойчивого положения равновесия $\theta = \theta_*$. Поскольку $\Phi_z = \dot{z} = \beta z > 0$ ($\beta > 0$) и величины Θ_i в (4.2) положительные, то имеет место однократный проход через сепаратрису фазовой точки из внешней области во внутреннюю [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1944. 655 с.
2. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771–778.
3. Асланов В.С., Серов В.М. Вращательное движение осесимметричного твердого тела с бигармонической характеристикой восстанавливающего момента // Изв. АН. МТТ. 1995. № 3. С. 19–25.