МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2003

УДК 531.38

© 2003 г. В.С. АСЛАНОВ, И.А. ТИМБАЙ

КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ – УГОЛ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ БИГАРМОНИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Рассматривается движение твердого тела, близкого к динамически симметричному, относительно центра масс под действием нутационного момента, имеющего вид нечетного ряда Фурье по углу нутации с медленно меняющимися во времени коэффициентами, и малого возмущающего момента. Для случая, когда величина нутационного момента определяется бигармонической зависимостью от угла нутации, уравнения невозмущенного движения записаны в переменных действие – угол, которые выражены через полные эллиптические интегралы. Рассмотрены также все возможные частные случаи движения, соответствующие различным областям фазового портрета системы. Установлена связь канонических переменных действие – угол с переменными Эйлера.

1. Постановка задачи. Рассмотрим возмущенное движение свободного твердого тела, близкого к динамически симметричному, относительно системы координат, которая имеет начало в центре масс тела и движется поступательно. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot p + (\mu - 1)qr = m_\theta(\theta, z)\cos\varphi + \varepsilon m_1(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, z)\\
&\dot q + (1 - \mu)pr = -m_\theta(\theta, z)\sin\varphi + \varepsilon m_2(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, z)\\
&\mu\dot r = \varepsilon m_3(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, z)\\
&\dot\psi = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)/\sin\theta\\
&\dot\theta = p\cos\varphi - q\sin\varphi\\
&\dot\varphi = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)/\operatorname{tg}\theta\\
&\dot z = \varepsilon\Phi_z(\theta, z)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь динамические уравнения Эйлера записаны в проекциях на главные оси инерции тела; p, q, r – проекции вектора угловой скорости на эти оси; ψ, θ, φ – углы Эйлера (угол прецессии, угол нутации, угол собственного вращения); z – вектор медленных переменных (к их числу могут относиться, например, параметры движения центра масс); $\mu = C/A$ – отношение экваториального и осевого моментов инерции тела относительно центра масс; m_θ – момент, действующий в плоскости угла нутации, отнесенный к экваториальному моменту инерции; εm_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела, отнесенные к экваториальному моменту инерции; ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений.

Движение твердого тела под действием нутационного момента $m_\theta(\theta, z)$, который имеет вид нечетного ряда Фурье по углу нутации с медленно меняющимися во времени коэффициентами, и малого возмущающего момента εm можно определить как движение твердого тела в обобщенном случае Лагранжа.

При $\varepsilon = 0$, $m_\theta(\theta) = 0$ имеет место движение твердого тела в случае Эйлера, а при $\varepsilon = 0$, $m_\theta(\theta) = a\sin(\theta)$ и $a > 0$ ($a = \mathrm{const}$) имеет место движение тяжелого твердого тела в случае Лагранжа в классической постановке [1]. В [2] рассматриваются возмущенные движения твердого тела близкие к классическому случаю Лагранжа. На основе анализа структуры уравнений движения, описывающих изменение интегралов невозмущенного движения, определяются условия, при которых возможно усреднение по одной быстрой переменной – углу нутации. Эти условия формулируются в виде требований к характеру функциональной зависимости проекций внешнего момента на связанные оси от углов Эйлера. Усредненные уравнения записываются для корней специального характеристического полинома, являющихся медленными переменными и с их помощью исследуется движение твердого тела при действии возмущений типа линейно-диссипативного момента. В [3] исследуются резонансные режимы движения, вызванные наличием малой инерционно-массовой асимметрией тела. Движение рассматривается как двухчастотное, с переменными частотами колебаний по углу нутации и углу собственного вращения. Для случая движения тела под действием нутационного момента близкого к синусоидальному выписаны усредненные уравнения движения, найдены необходимые и достаточные условия устойчивости резонансного движения. В [4] при аналогичной постановке задачи дана оценка вероятности захвата в резонанс.

Для ряда практических задач, например, для задачи о входе неуправляемого твердого тела в атмосферу планеты [5, 6], характерен случай, когда величина нутационного момента определяется бигармонической зависимостью от угла нутации

$$m_\theta(\theta, z) = a(z)\sin\theta + b(z)\sin 2\theta \tag{1.2}$$

где $a(z)$, $b(z)$ – медленно меняющиеся коэффициенты, на знаки которых никаких ограничений не накладывается. Для данного случая в [5] найдены общие решения для углов Эйлера в невозмущенном движении, получены усредненные уравнения возмущенного движения, обусловленного медленным изменением нутационного момента и действием малых моментов диссипативных сил. В [6] получены аналитические формулы для интеграла действия, исследованы переходные режимы возмущенного движения, вызванные медленным изменением во времени бигармонического нутационного момента.

При исследовании движения твердого тела методами теории возмущений весьма эффективным оказывается использование переменных действие – угол. Движение твердого тела в случае Эйлера в канонических переменных действие – угол описано в [7]. В [8, 9] в переменных действие – угол записаны уравнения движения твердого тела в классическом случае Лагранжа. В данной работе в переменных действие – угол описывается движение твердого тела под действием бигармонического нутационного момента.

2. Канонические переменные действие – угол. Рассмотрим невозмущенное движение твердого тела ($\varepsilon = 0$, $z = \mathrm{const}$) под действием бигармонического момента (1.2). В качестве исходных канонических переменных выберем переменные Эйлера. Углы Эйлера ψ, θ, φ будем рассматривать как обобщенные координаты. Тогда обобщенные импульсы p_ψ, p_θ, p_φ определяются соотношениями [10]:

$$p_\psi = A(p\sin\varphi + q\cos\varphi)\sin\theta + Cr\cos\theta = \mathrm{const}$$

$$p_\theta = A(p\cos\varphi - q\sin\varphi)$$

$$p_\varphi = Cr = \mathrm{const}$$

Гамильтонова функция для рассматриваемой невозмущенной системы постоянна и равна полной механической энергии

$$H = \frac{p_\varphi^2 + p_\psi^2 - 2p_\varphi p_\psi \cos\theta}{2A\sin^2\theta} + \frac{p_\varphi^2}{2C} - \frac{p_\varphi^2}{2A} + \frac{p_\theta^2}{2A} + A(a\cos\theta + b\cos^2\theta) = h \tag{2.1}$$

Введем переменные действие – угол I_i, w_i ($i = 1, 2, 3$). Переменные ψ, φ являются циклическими переменными и для соответствующих им переменных действия имеем

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\oint p_\psi d\psi = p_\psi, \quad I_3 = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi = p_\varphi$$

Переменную действия I_2, соответствующую углу нутации, вычислим по формуле

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\oint p_\theta d\theta \tag{2.2}$$

в которой интеграл берется за полный период изменения угла нутации θ.

Импульс p_θ определим из интеграла энергии (2.1), при этом сделаем замену переменных $u = \cos\theta$, тогда интеграл (2.2) принимает вид

$$I_2 = -\frac{1}{\pi}\int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2}du \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} f(u) = \dot{u}^2 = 2A^2bu^4 + 2A^2au^3 - (2A^2b + 2Ah + (1-\mu^{-1})I_3^2)u^2 - \\ - 2(A^2a - I_1I_3)u + (2Ah - I_1^2 - \mu^{-1}I_3^2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $u_1 = \cos\theta_{\min}$, $u_2 = \cos\theta_{\max}$ (при плоском вращении $u_1 = 1$, $u_2 = -1$; при плоских колебаниях относительно $\theta = 0$: $u_1 = 1$, $u_2 = \cos\theta_{\max}$, относительно $\theta = \pi$: $u_1 = \cos\theta_{\min}$, $u_2 = -1$).

Интеграл (2.3) относится к классу эллиптических интегралов и, следовательно, приводится к сумме элементарных функций и трех нормальных эллиптических интегралов [11]. Результат интегрирования зависит от типа корней полинома четвертой степени $f(u)$. Для реализации реального физического процесса два из четырех корней многочлена (2.4) должны соответствовать предельным значениям угла нутации $u_1 = \cos\theta_{\min}$, $u_2 = \cos\theta_{\max}$, при этом $[u_2, u_1] \in [-1, +1]$. Оставшиеся два корня u_3, u_4 в зависимости от соотношения величин h, a, b, I_1 и I_3 могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. Введем следующее правило нумерации этих корней. Действительные корни: при $b < 0$ – $u_3 > u_4$, при $b > 0$ – $u_3 < u_4$. Комплексно-сопряженные корни: $u_{3,4} = u_{3,4} \pm iw$.

Приведение интеграла (2.3) к нормальным эллиптическим осуществляется посредством преобразования $u = u(\gamma)$, отображающего интервал интегрирования $[u_1, u_2]$ в соответствующий интервал действительного аргумента $\gamma[0, \pi/2]$. Вид преобразования $u = u(\gamma)$ зависит от типа и сочетания корней, а также от знака старшего коэффициента b полинома $f(u)$ [11].

Для случая, когда все четыре корня действительные, преобразование при условии принятого выше правила нумерации корней может быть представлена в общем виде

$$u = \frac{u_2(u_1 - u_3) - u_3(u_1 - u_2)\sin^2\gamma}{(u_1 - u_3) - (u_1 - u_2)\sin^2\gamma} \tag{2.5}$$

В результате преобразования, для случая, когда все корни действительные, имеем следующее выражение для переменной действия

$$
\begin{aligned}
I_2 = {} & \frac{\eta}{\pi}\Big\{[h + 0.5(A^{-1} - C^{-1})I_3^2]K(k) - Aa[\lambda K(k) + \nu\Pi(n, k)] - \\
& -Ab\Big[(\lambda^2 - 0.5\nu^2/(1+n))K(k) + \left(\frac{0.5\nu^2 n}{(1+n)(k^2+n)}\right)E(k) + \\
& + \left(0.5\nu^2\left(\frac{n+2k^2}{k^2+n} + \frac{1}{1+n}\right) + 2\lambda\nu\right)\Pi(n, k)\Big]\Big\} - \frac{\eta}{2A\pi}\sum_{i=1}^{2} d_i[\lambda_i K(k) + (\nu_i - \lambda_i)\Pi(n_i, K)]
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$k = [(u_3 - u_4)(u_2 - u_1)/(u_3 - u_1)/(u_2 - u_4)]^{1/2}$$

$$n = (u_2 - u_1)/(u_1 - u_3), \quad \eta = 4/\sqrt{-2b(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)}, \quad \lambda = u_3$$

$$\nu = (u_2 - u_3), \quad d_{1,2} = 0.5(I_3 \mp I_1)^2, \quad n_{1,2} = (u_2 - u_1)(1 \mp u_3)/(u_1 - u_3)/(1 \mp u_2)$$

$$\lambda_{1,2} = 1/(1 \mp u_3), \quad \nu_{1,2} = 1/(1 \mp u_2)$$

где $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(n, k)$ – полные эллиптические интегралы I, II и III рода; k – модуль эллиптических интегралов.

Если имеют место два действительных и два комплексных корня ($u_{3,4} = u_{3,4} \pm iw$), то, используя преобразование

$$
\begin{aligned}
& u = \frac{u_2 + u_1\xi - (u_2 - \xi u_1)\cos\gamma}{(1+\xi) - (1-\xi)\cos\gamma} \\
& \xi = \cos\theta_1/\cos\theta_2, \quad \mathrm{tg}\theta_1 = (u_1 - u_{34})/w, \quad \mathrm{tg}\theta_2 = (u_2 - u_{34})/w
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

получим следующее выражение для переменной действия:

$$
\begin{aligned}
I_2 = {} & \frac{\eta}{\pi}\{[h + 0.5(A^{-1} - C^{-1})I_3^2]K(k) - Aa[\lambda K(k) + \nu(1+n)\Pi(n, k)] - \\
& -Ab\left[(\lambda^2 - \nu^2(1+n))K(k) + \left(\frac{\nu^2(1+n)n}{k^2+n}\right)E(k) + (1+n)\left(\frac{\nu^2(1+n)(n+2k^2)}{k^2+n} + 2\lambda\nu\right)\Pi(n, k)\right]\Big\} - \\
& -\frac{\eta}{2A\pi}\sum_{i=1}^{2} 0.5d_i[\lambda_i K(k) + \nu_i(1+n_i)\Pi(n_i, k)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& k = [0.5(1 - \zeta/\vartheta)]^{1/2}, \quad n = (\xi - 1)^2/(4\xi), \quad \eta = 4/\sqrt{-2b\vartheta} \\
& \zeta = (u_1 - u_{34})(u_2 - u_{34}) + w^2, \quad \vartheta = [(u_1 - u_{34})^2 + w^2]^{1/2}[(u_2 - u_{34})^2 + w^2]^{1/2} \\
& \xi = [(u_1 - u_{34})^2 + w^2]^{-1/2}[(u_2 - u_{34})^2 + w^2]^{1/2}, \quad \lambda = (u_1\xi - u_2)/(\xi - 1) \\
& \nu = 2\xi(u_2 - u_1)/(\xi^2 - 1), \quad n_{1,2} = (\xi - 1 \pm u_2 \mp \xi u_1)^2/[4\xi(1 \mp u_1 \mp u_2 + u_1 u_2)] \\
& \lambda_{1,2} = (\xi - 1)/(\xi - 1 \pm u_2 \mp \xi u_1), \quad \nu_{1,2} = (1+\xi)/(1 + \xi \mp u_2 \mp \xi u_1) - \lambda_{1,2}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Следует заметить, что интегралы (2.6) и (2.8) были вычислены ранее в [6] с точностью до постоянной величины.

Таким образом, в общем пространственном случае движения твердого тела под действием бигармонического момента переменные действия I_1 и I_3 совпадают с переменными Эйлера p_ψ и p_φ, а переменная действия I_2 зависит от пяти полных эллиптических интегралов.

Определим функцию Гамильтона в переменных действие – угол. Переменная I_2 является функцией постоянной энергии h. Для однозначного разрешения уравнения для переменной I_2 относительно постоянной энергии h необходимо, чтобы выполнялось условие $\partial I_2/\partial h \neq 0$.

Учитывая (2.3), получим

$$\frac{\partial I_2}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2}du\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\int_{u_1}^{u_2}\frac{\partial}{\partial h}\frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2}du + \frac{\sqrt{f(u_2)}}{1-u^2}\frac{\partial u_2}{\partial h} - \frac{\sqrt{f(u_1)}}{1-u^2}\frac{\partial u_1}{\partial h}\right)$$

Последние два слагаемых равны нулю, поскольку u_2, u_1 корни уравнения $f(u) = 0$, следовательно

$$\frac{\partial I_2}{\partial h} = -\frac{1}{\pi}\int_{u_1}^{u_2}\frac{A}{\sqrt{f(u)}}du$$

и после преобразования

$$\frac{\partial I_2}{\partial h} = \frac{\eta}{2\kappa}K(k) \tag{2.9}$$

Для случая различных корней u_1 и u_2, u_3 и u_4 эта производная строго положительна, значит уравнения (2.6) и (2.8) относительно h однозначно разрешимы.

Следовательно, функция Гамильтона является функцией переменных действия $H = H(I_1, I_2, I_3)$ и для нее все обобщенные координаты w_i $(i = 1, 2, 3)$ – циклические. Уравнения Гамильтона для канонических переменных действие – угол имеют вид

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i, \quad \frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Отсюда, очевидно, что $I_i = \mathrm{const}_i$, и поскольку частоты $\omega_i = \omega_i(I_i)$ являются постоянными величинами, то для угловых переменных имеем

$$w_i = \omega_i t + w_{i0} \tag{2.10}$$

Определим частоты движения твердого тела под действием бигармонического момента. Частота движения по второй координате, учитывая (2.9), определяется следующим образом:

если все корни полинома $f(u)$ действительные:

$$\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \beta\frac{\pi}{K(k)} \tag{2.11}$$

$$\beta = \sqrt{-0.5b(u_1-u_3)(u_2-u_4)} \tag{2.12}$$

если два действительных и два комплексных:

$$\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \beta\frac{\pi}{2K(k)} \tag{2.13}$$

$$\beta = \sqrt{-2b\vartheta} \tag{2.14}$$

Определим частоту движения по первой координате ω_1. Для этого перепишем (2.3) в виде

$$G(I_1, I_3, h) - I_2 = 0$$

$$G(I_1, I_3, h) = -\frac{1}{\pi}\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2}du \tag{2.15}$$

Дифференцируя (2.15) по I_1, имеем

$$\frac{\partial h}{\partial I_1} = -\frac{\partial G}{\partial I_1}/\frac{\partial G}{\partial h} \tag{2.16}$$

Здесь

$$\frac{\partial G}{\partial I_1} = -\frac{1}{\pi}\int_{u_1}^{u_2}\frac{I_3u - I_1}{\sqrt{f(u)}(1-u^2)}du \tag{2.17}$$

Преобразуя выражение (2.17), учитывая соотношения (2.9) и (2.16), получим, в случае, если все корни полинома $f(u)$ действительные

$$\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \frac{1}{AK(k)}\sum_{i=1}^{2} d_{i+2}[\lambda_i K(k) + (\nu_i - \lambda_i)\Pi(n_i, k)] \tag{2.18}$$

если имеют место два действительных и два мнимых корня, тогда

$$\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \frac{1}{AK(k)}\sum_{i=1}^{2} d_{i+2}[\lambda_i K(k) + \nu_i(1+n_i)\Pi(n_i, k)] \tag{2.19}$$

$$d_{3,4} = 0.5(I_1 \mp I_3)$$

Аналогично определим частоту по третьей координате

$$\omega_3 = \frac{\partial H}{\partial I_3} = -\frac{\partial G}{\partial I_3}/\frac{\partial G}{\partial h}$$

$$\frac{\partial G}{\partial I_3} = -\frac{1}{\pi}\int_{u_1}^{u_2}\frac{I_3 - I_3(A/C) + I_1u - I_3}{\sqrt{f(u)}(1-u^2)}du$$

В результате, если все корни полинома $f(u)$ действительные, то

$$\omega_3 = \frac{\partial H}{\partial I_3} = \frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} + \frac{1}{AK(k)}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i d_{i+2}[\lambda_i K(k) + (\nu_i - \lambda_i)\Pi(n_i, k)] \tag{2.20}$$

если два корня действительных и два комплексных, тогда

$$\omega_3 = \frac{\partial H}{\partial I_3} = \frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} + \frac{1}{AK(k)}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i d_{i+2}[\lambda_i K(k) + \nu_i(1+n_i)\Pi(n_i, k)] \tag{2.21}$$

Заметим, что коэффициенты k, λ_i, ν_i, n_i, входящие в выражения (2.18)–(2.21) определяются по формулам (2.6) или (2.8) в зависимости от типа корней полинома $f(u)$.

3. Частные случаи движения твердого тела под действием бигармонического момента. Невозмущенное движение твердого тела под действием бигармонического момента в переменных Эйлера, как системы с одной степенью свободы с гамильтонианом (2.1), в зависимости от начальных условий и значений величин a, b, I_1, I_3 может происходить в одной из областей фазовых портретов, показанных на фиг. 1–3 для плоского движения и на фиг. 4 для пространственного движения. Для каждой из этих областей можно определить корни полинома $f(u) = 0$ через коэффициенты a, b, I_1, I_3 и начальные условия (h) и упростить в ряде случаев формулы для переменных действие – угол. Рассмотрим эти частные случаи движения тела, соответствующие различным областям фазового портрета системы.

При плоском движении ($I_1 = I_3 = 0$, $\omega_1 = \omega_3 = 0$), зависимости от соотношения величин a и b, имеют место три характерных вида фазовых портретов.

(*1*) $|b| \le 0.5|a|$. Фазовый портрет аналогичен фазовому портрету математического маятника и для случая $a < 0$ изображен на фиг. 1 (при $a > 0$ фазовая картина сдвинута по оси θ на величину π).

При $h > A(|a| + b)$ реализуется вращательное движение тела. В этом случае, при $b < 0$, $h < Aa^2/(-4b)$, полином $f(u)$ имеет два действительных и два комплексно-сопряженных корня:

$$u_{1,2} = \pm 1, \quad u_{3,4} = u_{34} \pm iw$$

$$u_{34} = -0.5a/b, \quad w = [-(0.5a/b)^2 - h/(Ab)]^{1/2}$$

Выражение для переменной действия I_2 (2.8) при этом упрощается:

$$\begin{gathered}
I_2 = \frac{\eta}{\pi}\{hK(k) - A|a|(1 + 1/n)^{1/2}[K(k) - \Pi(n,k)] - \\
-Ab[K(k) + (E(k) - (1+n)\Pi(n,k))/(k^2+n)]\} \\
k = [0.5 - (h + Ab)/(cs)]^{1/2}, \quad n = (s-c)^2/(4sc), \quad \eta = 4[A/(cs)]^{1/2} \\
c, s = [2(h \mp Aa - Ab)]^{1/2}
\end{gathered} \tag{3.1}$$

При $b < 0$, $h = Aa^2/(-4b)$ (все корни полинома действительные, два корня равны между собой, модуль эллиптических интегралов $k = 0$) имеем $I_2 = A|a|/\sqrt{-2b}$.

При $b < 0$, $[Aa^2/(-4b)] \ge h > [A(|a| + b)]$ и $b > 0$, $h > A(|a| + b)$ корни действительные:

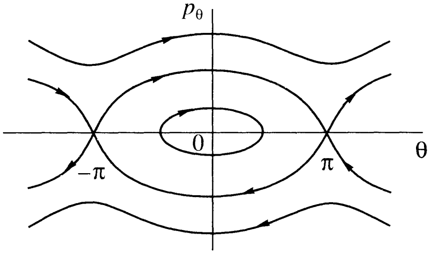
$$u_{1,2} = \pm 1, \quad u_{3,4} = -(0.5a/b) \mp \operatorname{sign}(b)[(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2} \tag{3.2}$$

Переменная I_2 в этом случае вычисляется по формуле (2.6) с учетом равенств (3.2) и того, что коэффициенты $d_1 = d_2 = 0$, поскольку $I_1 = I_3 = 0$.

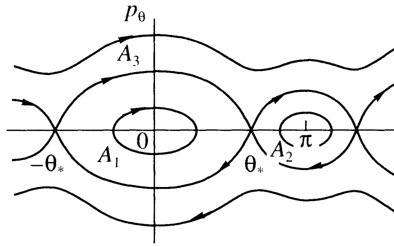
Границе перехода вращения в колебания соответствует условие $h = A(|a| + b)$. В этом случае все корни полинома $f(u)$ действительные, два корня равны между собой и, поскольку при этом под знаком радикала в выражении (2.3) остается полином второй степени, то интеграл, взятый вдоль сепаратрисы, выражается через элементарные функции

$$I_2 = \frac{2A}{\pi}\sqrt{-2b}[\sqrt{u_* - 1} + u_* \operatorname{arctg}(\sqrt{1/(u_* - 1)})] \quad \text{при} \quad b < 0 \tag{3.3}$$

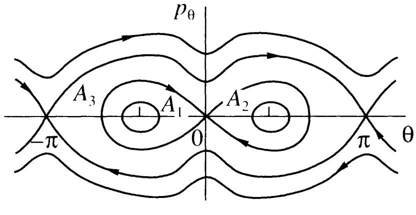
$$I_2 = \frac{2A}{\pi}\sqrt{2b}[\sqrt{u_* + 1} + u_* \ln((1 + \sqrt{u_* + 1})/\sqrt{u_*})] \quad \text{при} \quad b > 0 \tag{3.4}$$



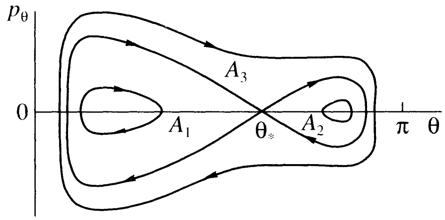
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Колебательному движению относительно $\theta = 0$ (при $a < 0$) или $\theta = \pi$ (при $a > 0$) соответствует условие $[A(-|a| + b)] < h < [A(|a| + b)]$. В этой области движения переменная I_2 вычисляется по формуле (2.6), а корни определяются следующим образом:

$$u_{1,3} = \pm 1, \quad u_{2,4} = -(0.5a/b) \mp \operatorname{sign}(b)[(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2} \quad \text{при} \quad a < 0$$
$$u_{2,4} = \mp 1, \quad u_{1,3} = -(0.5a/b) \pm \operatorname{sign}(b)[(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2} \quad \text{при} \quad a > 0 \qquad (3.5)$$

(2) $|b| > 0.5|a|$, $b < 0$. На фазовом портрете появляются дополнительные особые точки типа седло, соответствующие значениям угла нутации $\theta_* = \pm\arccos(-0.5a/b) + 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), и имеют место три области движения: вращательная A_3 и две колебательные A_1 и A_2 (фиг. 2).

При $h < Aa^2/(-4b)$ реализуется вращательное движение тела, которому соответствуют два действительных и два комплексно-сопряженных корня полинома:

$$u_{1,2} = \pm 1, \quad u_{3,4} = u_{34} \pm iw$$
$$u_{34} = -0.5a/b, \quad w = [-(0.5a/b)^2 - h/(Ab)]^{1/2}$$

Переменная I_2 в этом случае определяется по формуле (3.1).

Границе перехода между областями фазовой плоскости соответствует условие $h = Aa^2/(-4b)$. На границе перехода интеграл, взятый вдоль сепаратрис, имеет вид

$$I_2 = \frac{2A}{\pi}\sqrt{-2b}[\sin\theta_* + (0.5\pi - \theta_*)\cos\theta_*]$$
$$\theta_* = \arccos(-0.5a/b) \qquad (3.6)$$

Колебательному движению в области A_1 относительно точки $\theta = 0$ соответствует условие $[A(a + b)] < h < [Aa^2/(-4b)]$, а колебаниям в области A_2 относительно точки

$\theta = \pi$ соответствует условие $[A(-a + b)] < h < [Aa^2/(-4b)]$. В этих колебательных областях движения переменная I_2 вычисляется по формуле (2.6). При этом корни определяются следующим образом:

при колебаниях в области A_1 относительно точки $\theta = 0$:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -0.5a/b + [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}$$

$$u_3 = \max[-1, -0.5a/b - [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}]$$

$$u_4 = \min[-1, -0.5a/b - [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}]$$

при колебаниях в области A_2 относительно точки $\theta = \pi$:

$$u_1 = -0.5a/b - [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}, \quad u_2 = -1$$

$$u_3 = \max[1, -0.5a/b + [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}]$$

$$u_4 = \min[1, -0.5a/b + [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}]$$

(*3*) $b > 0.5|a|$, $b > 0$. Фазовый портрет для случая $a < 0$ изображен на фиг. 3 (при $a > 0$ фазовая картина сдвинута по оси θ на величину π). Здесь особым точкам типа центр соответствуют значения угла нутации $\theta = \pm\arccos(-0.5a/b) + 2n\pi$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), а в точках $\theta = n\pi$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) имеет место седло. На фазовом портрете располагаются четыре характерные области движения: вращательная и три колебательные.

При $h > A(|a| + b)$ реализуется вращательное движение тела. Переменная I_2 определяется выражением (2.6). При этом корни полинома $f(u)$ определяются по формулам (3.2).

Границе перехода вращения в колебания относительно неустойчивого положения равновесия $\theta = 0$ (при $a < 0$) или $\theta = \pi$ (при $a > 0$) соответствует условие $h = A(|a| + b)$. Интеграл, взятый вдоль сепаратрис, в этом случае определяется выражением (3.3).

При $[A(-|a| + b)] < h < [A(|a| + b)]$ тело совершает колебания относительно неустойчивого положения равновесия $\theta = 0$ (при $a < 0$) или $\theta = \pi$ (при $a > 0$). Переменная действия определяется выражением (2.6). При этом корни определяются по формулам (3.5).

Границе перехода из колебательной области A_3 в одну из двух колебательных областей A_1 или A_2 соответствует условие $h = A(-|a| + b)$. Интеграл, взятый вдоль сепаратрисы, имеет вид

$$I_2 = \frac{2A}{\pi}\sqrt{2b}[\sqrt{1 - u_*} - u_* \ln((1 + \sqrt{1 - u_*})/\sqrt{u_*})]$$
$$u_* = |0.5a/b| \tag{3.7}$$

Колебаниям относительно устойчивых положений равновесия $\theta = \pm\arccos(-0.5a/b)$ соответствует условие $[A(-|a| + b)] < h < [Aa^2/(-4b)]$. Переменная действия определяется выражением (2.6). При этом корни определяются по следующим формулам:

$$u_{1,2} = -(0.5a/b) \mp [(0.5a/b)^2 + h/(Ab)]^{1/2}, \quad u_{3,4} = \mp 1$$

В случае пространственного движения тела с бигармонической моментной характеристикой наличие гироскопического члена в выражении для интеграла энергии (2.1) исключает возможность вращательного движения. В зависимости от типа корней полинома (2.4) переменная действия вычисляется по формулам (2.6) или (2.8). Вторая гармоника в бигармонической моментной характеристике обуславливает возможность появления на фазовом портрете особой точки типа седло. В этом случае имеют место три колебательные области (фиг. 4). Качественный анализ уравнения (2.1) показывает, что если внутри интервала для угла нутации $(0, \pi)$ седловая точка отсутствует в плоском случае ($I_1 = I_3 = 0$), то она отсутствует и в случае пространственных колебаний независимо от величин I_1 и I_3. С другой стороны, если при $I_1 = I_3 = 0$ седловая точка имеет место (случай $|b| > 0.5|a|$, $b < 0$), то обеспечить ее отсутствие можно только выбором достаточно больших по модулю I_1 и I_3. В случае, когда седловая точка имеет место, при движении во внешней области A_3 (фиг. 4) переменная I_2 определяется по формуле (2.8) (два корня полинома $f(u)$ действительные, два комплексно-сопряженных). При движении в одной из внутренних колебательных областях A_1 или A_2 переменная действия определяется по формуле (2.6) (все корни действительные).

Границе перехода из внешней колебательной области в одну из внутренних колебательных областей соответствует момент перехода комплексно-сопряженных корней $u_{3,4} = u_{34} \pm iw$ в действительные $u_{3,4} = u_{34} = u_* = \cos\theta_*$, $w = 0$. В этом случае полином (2.4) имеет вид

$$f(u) = 2A^2 b(u-u_1)(u-u_2)(u-u_*)^2$$

и интеграл (2.3) вычисляется через элементарные функции

$$I_2 = \frac{A}{\pi}\sqrt{-2b}\left[2\sqrt{(u_1-u_*)(u_*-u_2)} - \sum_{i=1}^{3} c_i \arcsin\delta_i\right]$$

$$\begin{aligned} c_1 &= u_1 + u_2 + 2u_*, \quad c_{2,3} = (1 \mp u_*)\sqrt{(u_1 \mp 1)(u_2 \mp 1)} \\ \delta_1 &= (u_1 + u_2 - 2u_*)/|u_2 - u_1| \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\delta_{2,3} = [(u_2 \mp 1)(u_* - u_1) + (u_1 \mp 1)(u_* - u_2)]/|(u_2 - u_1)(u_* \mp 1)|$$

4. Связь канонических переменных действие – угол с переменными Эйлера. Чтобы найти выражение канонических переменных действие – угол через углы Эйлера ψ, θ, φ, построим производящую функцию $W(\psi, \theta, \varphi, I_1, I_2, I_3)$ канонического преобразования. Функция Гамильтона H определяется формулой (2.1), в которую входит только одна нециклическая координата θ. Поэтому производящую функцию W можно искать в виде [12]

$$W = V(\theta, I_1, I_3, h(I_1, I_2, I_3)) + I_1\psi + I_3\varphi \tag{4.1}$$

Здесь функция V вычисляется по формуле

$$V = \int_{\theta_{\min}}^{\theta} p_\theta d\theta = -\int_{u_1}^{u} \frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2} du \tag{4.2}$$

Угловые переменные w_i определяются по правилам канонического преобразования [12]:

$$w_i = \partial W/\partial I_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.3}$$

Найдем выражение для угловой переменной w_2:

$$w_2 = \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{\partial V}{\partial I_2} = \frac{\partial V}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial I_2}$$

Вычисляя частную производную от V (4.2) по переменной h, преобразуя полученное выражение к эллиптическому интегралу первого рода и учитывая равенство (2.9), получим

если все корни полинома $f(u)$ действительные:

$$w_2 = \pi - \pi\frac{F(k)}{K(k)} \tag{4.4}$$

если два корня действительные и два комплексных:

$$w_2 = \pi\frac{F(k)}{2K(k)} \tag{4.5}$$

$$F(\gamma, k) = \int_0^{\gamma}\frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}} \tag{4.6}$$

где $F(\gamma, k)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода.

Определим угловую переменную w_1:

$$w_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} = \psi + \frac{\partial V}{\partial I_1} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial I_1}$$

Вычисляя частные производные от V (4.2) по переменным I_1 и h, преобразуя полученные выражения к эллиптическим интегралам первого и третьего рода, учитывая равенства (2.18), (2.19) получим:

если корни полинома $f(u)$ действительные:

$$w_1 = \psi + \frac{\eta}{2A}\sum_{i=1}^{2} d_{i+2}(\nu_i - \lambda_i)[\Pi(\gamma, n_i, k) - \Pi(n_i, k)F(k)/K(k)] \tag{4.7}$$

если два действительных и два комплексных:

$$w_1 = \psi + \frac{\eta}{4A}\sum_{i=1}^{2} d_{i+2}\nu_i\{(1+n_i)[\Pi(n_i, k)F(k)/K(k) - \Pi(\gamma, n_i, k)] + B_i\}$$

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{b_i}{\sqrt{(b_i^2-1)(1-k^2+k^2b_i^2)}}\operatorname{arctg}\frac{\sin\gamma\sqrt{1-k^2+k^2b_i^2}}{\sqrt{b_i^2-1}\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}} \\ b_{1,2} &= \frac{1+\xi\mp u_2\mp u_1\xi}{\xi-1\pm u_2\mp u_1\xi} \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\Pi(\gamma, n_i, k) = \int_0^{\gamma}\frac{d\gamma}{(1+n_i\sin^2\gamma)\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}}$$

где $\Pi(\gamma, n_i, k)$ – неполный эллиптический интеграл третьего рода.

Определим угловую переменную w_3:

$$w_3 = \frac{\partial W}{\partial I_3} = \varphi + \frac{\partial V}{\partial I_3} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial I_3}$$

Вычисляя частные производные от V (4.2) по переменным I_3 и h, преобразуя полученные выражения к эллиптическим интегралам первого и третьего рода, учитывая равенства (2.20), (2.21) получим:

если корни полинома $f(u)$ действительные:

$$w_3 = \varphi + \frac{\eta}{2A}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i d_{i+2}(\nu_i - \lambda_i)[\Pi(\gamma, n_i, k) - \Pi(n_i, k)F(k)/K(k)] \tag{4.9}$$

если два действительных и два комплексных:

$$w_3 = \varphi + \frac{\eta}{4A}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i d_{i+2}\nu_i\{(1+n_i)[\Pi(n_i, k)F(k)/K(k) - \Pi(\gamma, n_i, k)] + B_i\} \tag{4.10}$$

Получим выражения углов Эйлера как функции времени. Обращая эллиптический интеграл $F(k)$ (4.6), учитывая (4.4) и (4.5), получим

если все корни полинома $f(u)$ действительные:

$$\gamma = \mathrm{am}\left[K(k) - \frac{w_2}{\pi}K(k), k\right] \tag{4.11}$$

если два действительных и два комплексных:

$$\gamma = \mathrm{am}\left[\frac{2w_2}{\pi}K(k), k\right] \tag{4.12}$$

Учитывая выражения для угловой переменной w_2 (2.10), для частоты ω_2 (2.11) или (2.13), полагая $w_{10} = 0$, формулы (4.11) и (4.2) можно записать в ввиде соответственно

$$\gamma = \mathrm{am}[K(k) - \beta t, k] \tag{4.13}$$

$$\gamma = \mathrm{am}[\beta t, k] \tag{4.14}$$

где β определяется в зависимости от типа корней полинома $f(u)$ по формулам (2.12) или (2.14).

На основании формул (2.5) и (2.7), учитывая (413.) и (4.14) запишем решение для угла нутации. Если корни полинома $f(u)$ действительные, то

$$\cos\theta = \frac{u_2(u_1 - u_3) - u_3(u_1 - u_2)\mathrm{sn}^2[K(k) - \beta t, k]}{(u_1 - u_3) - (u_1 - u_2)\mathrm{sn}^2[K(k) - \beta t, k]} \tag{4.15}$$

или после преобразований

$$\cos\theta = u_3 + \frac{u_1 - u_3}{1 + \{(u_1 - u_2)/(u_2 - u_3)\}\mathrm{sn}^2[K(k) - \beta t, k]} \tag{4.16}$$

Если имеют место два действительных и два комплексных корня, то

$$\cos\theta = \frac{u_2 + u_1\xi - (u_2 - \xi u_1)\mathrm{cn}[\beta t, k]}{(1+\xi) - (1-\xi)\mathrm{cn}[\beta t, k]} \tag{4.17}$$

или

$$\cos\theta = u_2 + (u_1 - u_2)\frac{\xi}{\xi - 1}\left\{1 + \frac{1 - (1+\xi)/(\xi - 1)}{(1+\xi)(\xi - 1) + \mathrm{cn}[\beta t, k]}\right\} \tag{4.18}$$

Подставляя $F(k)$ из соотношений (4.4) и (4.5) в (4.7)–(4.10), учитывая выражения для угловых переменных (2.10), для частот (2.11), (2.13), (2.18)–(2.21), полагая, что $w_{i0} = 0$, получим выражения для угла прецессии и угла собственного вращения:

если корни полинома $f(u)$ действительные:

$$\psi = \left(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{2} d_{i+2}\lambda_i\right)t + \frac{\eta}{2A}\sum_{i=1}^{2} d_{i+2}(\nu_i - \lambda_i)\{\Pi(n_i, k) - \Pi(\gamma, n_i, k)\} \tag{4.19}$$

$$\varphi = \left(\frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} + \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i d_{i+2}\lambda_i\right)t + \frac{\eta}{2A}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i d_{i+2}(\nu_i - \lambda_i)\{\Pi(n_i, k) - \Pi(\gamma, n_i, k)\} \tag{4.20}$$

если два корня действительных и два комплексных:

$$\psi = \left(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{2} d_{i+2}\lambda_i\right)t + \frac{\eta}{4A}\sum_{i=1}^{2} d_{i+2}\nu_i\{(1+n_i)\Pi(\gamma, n_i, k) - B_i\} \tag{4.21}$$

$$\varphi = \left(\frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} + \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i d_{i+2}\lambda_i\right)t + \frac{\eta}{4A}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i d_{i+2}\nu_i\{(1+n_i)\Pi(\gamma, n_i, k) - B_i\} \tag{4.22}$$

Заметим, что коэффициенты k, λ_i, ν_i, n_i, η, входящие в выражения (4.4)–(4.22) определяются по формулам (2.6) или (2.8) в зависимости от типа корней полинома $f(u)$.

Выведенные формулы для углов Эйлера (4.15)–(4.22) совпадают с аналитическими выражениями [5], полученными прямым взятием квадратур из выражений, полученных из первых интегралов системы.

Таким образом, движение твердого тела под действием бигармонического нутационного момента описано в канонических переменных действие – угол, которые выражены через полные эллиптические интегралы. Рассмотрены также все возможные частные случаи движения, соответствующие различным областям фазового портрета системы. Установлена связь канонических переменных действие – угол с переменными Эйлера.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00477).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1944. 655 с.
2. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771–778.
3. *Асланов В.С.* Нелинейные резонансы при неуправляемом спуске в атмосфере асимметричных КА // Космич. исследования. 1992. Т. 30. № 5. С. 608–614.
4. *Бобылев А.В., Ярошевский В.А.* Оценка условий захвата в режим резонансного вращения неуправляемого тела при спуске в атмосферу // Космич. исследования. 1999. Т. 37. № 5. С. 515–523.
5. *Серов В.М.* Вращательное движение динамически симметричного твердого тела под действием нелинейного момента // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 26–31.
6. *Асланов В.С., Тимбай И.А.* Интеграл действия при движении твердого тела в обобщенном случае Лагранжа // Изв. АН. МТТ. 1998. № 2. С. 9–17.
7. *Садов Ю.А.* Переменные действие – угол в задаче Эйлера – Пуансо // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 962–964.

8. *Аксененкова И.М.* Канонические переменные действие – угол в задаче о волчке Лагранжа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1981. № 1. С. 86–90.
9. *Демин В.Г., Конкина Л.И.* Новые методы в динамике твердого тела. Фрунзе: Илим, 1989. 182 с.
10. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
12. *Гантмахер Ф.О.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.

Самара

Поступила в редакцию
6.07.2000