

УДК 531.38

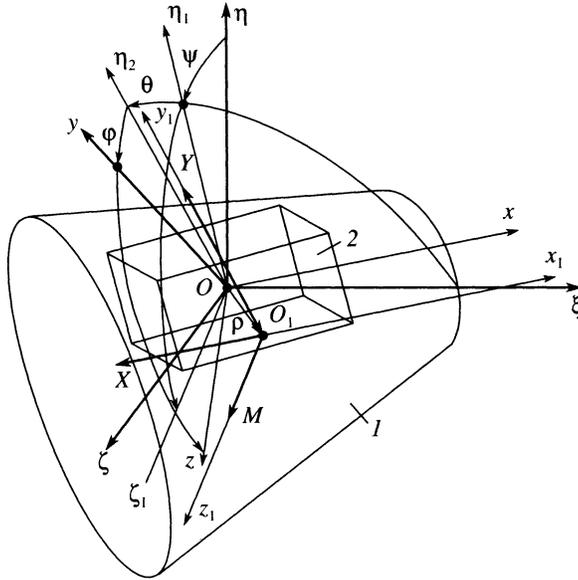
© 2005 г. В.С. АСЛАНОВ

ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В нелинейной постановке рассматривается движение вращающегося твердого тела в сопротивляющейся среде под действием синусоидального или бигармонического восстанавливающего момента, зависящего от времени, и малых возмущающих моментов. Приведены факторы, определяющие возмущения, в виде медленно меняющихся параметров и параметров малой асимметрии. Даны решения уравнений невозмущенного движения в эллиптических функциях Якоби. Для случая, когда нутационный момент определяется бигармонической зависимостью от угла нутации, уравнения невозмущенного движения записаны в переменных действие-угол, которые выражены через полные эллиптические интегралы. Построены усредненные уравнения движения осесимметричного тела при действии бигармонического и малых демпфирующих моментов. Уравнения возмущенного движения асимметричного тела приведены к стандартной двухчастотной системе, и построена частично усредненная система. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости нелинейных резонансов и устойчивости движения системы по Ляпунову в окрестности стационарной точки под действием малых возмущений. Приведен численный пример, в котором показано, что из устойчивости резонанса не следует устойчивость движения в окрестности стационарной точки и наоборот.

1. Тело в сопротивляющейся среде. Уравнения возмущенного движения. Развитием классической задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа является задача о движении твердого тела в сопротивляющейся среде. Примером такого тела является космический аппарат (КА), спускающейся в атмосфере планеты. Если КА является идеальным телом вращения как в динамическом, так и в геометрическом смысле и восстанавливающий аэродинамический момент пропорционален синусу пространственного угла атаки – угла нутации, то движение тела в атмосфере описывается теми же уравнениями, что и волчок Лагранжа [1]. Различие заключается лишь в том, что множитель перед синусом угла нутации есть медленно меняющаяся величина, а не постоянная, как в случае Лагранжа. Задача существенно усложняется, если рассматривать более общий случай, когда тело имеет малую динамическую асимметрию, точка приложения аэродинамических сил и моментов находится на оси симметрии геометрической формы, а центр масс тела смещен с этой оси (фиг. 1). Тело в потоке можно представить как совокупность двух тел с различными свойствами (фиг. 1): внутреннее тело 2, имеющее массу, и внешнее тело 1, не обладающее массой, с заданной геометрической формой. Эти тела жестко связаны и образуют единое твердое тело с геометрическими характеристиками внешнего тела и динамическими характеристиками внутреннего тела. Аэродинамические силы и моменты определяются внешним телом, а инерционно-динамические характеристики тела – внутренним телом.

Для описания движения тела в потоке необходимо ввести в рассмотрение три системы координат (фиг. 1): систему *Охуз*, связанную с внутренним телом и осью дина-



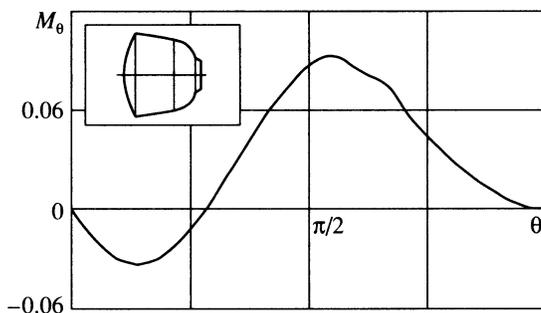
Фиг. 1

мической симметрии; систему $O_1x_1y_1z_1$, связанную с внешним телом, в которой задаются аэродинамические силы и моменты; систему координат $O\xi\eta\zeta$ с поступательно движущимися осями. Связанная система координат $Oxyz$ имеет начало в центре масс твердого тела, ось Ox – ось динамической симметрии. Система $Oxyz$ расположена так, что центробежный момент инерции тела $I_{yz} = 0$. Система координат $O_1x_1y_1z_1$ связана с плоскостью угла нутации θ . Точка O_1 лежит в некоторой фиксированной точке геометрической оси симметрии тела. Связанная система $Oxyz$ повернута относительно системы $O_1x_1y_1z_1$ на угол собственного вращения φ . Точка O_1 в связанной системе $Oxyz$ определяется вектором $\rho(x_c, y_c, z_c)$. Связь между системой координат $O\xi\eta\zeta$ и связанной системой $Oxyz$ осуществляется с помощью углов Эйлера ψ, θ, φ .

Асимметрия проявляется в несовпадении точки O_1 приложения аэродинамических сил и моментов с центром масс. Поперечное смещение точки O_1 относительно центра масс ($y_c \neq 0, z_c \neq 0$) вызывает появление дополнительных моментов от аэродинамических сил X и Y (фиг. 1). Различие поперечных моментов инерции тела ($I_y \neq I_z$) и перекося главных центральных осей инерции относительно осей связанной системы координат ($I_{xy} \neq 0, I_{xz} \neq 0$) также является причиной асимметрии.

Вектору асимметрии $\Delta\xi$ припишем порядок малости ε : $\Delta\xi = (\bar{y}_c, \bar{z}_c, \bar{\Delta}, \bar{I}_{xy}, \bar{I}_{xz}, \Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z) = O(\varepsilon)$, где $\bar{y}_c = y_c/L, z_c = \bar{z}_c/L$ – относительное поперечное смещение центра масс с геометрической оси симметрии (L – характерный размер тела, например, диаметр); $\bar{\Delta} = (I_z - I_y)/I$ – безразмерная разность поперечных моментов инерции ($I = (I_y - I_z)/2$); $\bar{I}_{xy} = I_{xy}/I, \bar{I}_{xz} = I_{xz}/I$ – безразмерные центробежные моменты; $\Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z$ – коэффициенты малых возмущающих аэродинамических моментов.

Пусть на тело в потоке действуют следующие моменты: восстанавливающий момент, малые демпфирующие моменты, пропорциональные проекциям угловой скорости, и малые возмущающие моменты, вызванные асимметрией формы. Восстанавливающий момент является нечетной функцией угла нутации θ и может



Фиг. 2

быть представлен для весьма широкого класса форм тел в виде бигармонической зависимости:

$$M = M_\theta I = (a \sin \theta + b \sin 2\theta) I \quad (1.1)$$

Синусоидальная характеристика ($b = 0$) описывает тела близкие по форме к сфере или к тонкому конусу [2], однако если тело имеет более сложную форму, допускающую наличие балансирующего положения, отличного от значений $\theta = 0, \pi$ (фиг. 2), то следует использовать бигармоническую зависимость (1.1). Если восстанавливающий момент тела аппроксимировать нечетным рядом Фурье с числом членов $n > 2$, когда коэффициенты при гармониках с номерами $n > 2$ малы по сравнению с a или b , то эти члены могут быть включены в малые возмущающие моменты.

Известно, что для случая Лагранжа обобщенные импульсы, соответствующие углам собственного вращения и прецессии, являются первыми интегралами системы и представляют собой проекции кинетического момента на ось симметрии тела и ось прецессии [3]. Имея в виду, что при движении тела в потоке ось прецессии совпадает с направлением вектора поступательной скорости, представим указанные обобщенные импульсы, отнесенные к среднему поперечному моменту инерции I , в следующем виде:

$$R = \bar{I}_x \omega_x, \quad G = R \cos \theta + (-\omega_y \cos \varphi + \omega_z \sin \varphi) \sin \theta \quad (1.2)$$

где $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ – вектор угловой скорости в проекциях на оси системы $Oxyz$; $\bar{I}_x = I_x/I$ – безразмерный момент инерции тела относительно оси Ox .

В силу действующих малых возмущений величины R и G будут медленно изменяться во времени. Выбирая их в качестве новых переменных, уравнения движения тела в потоке представим в виде [4]:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + (R - G \cos \theta)(G - R \cos \theta) / \sin^3 \theta - M_\theta(\theta, z) &= \varepsilon \Phi_\theta(\theta, \varphi, z) \\ \dot{\varphi} = R/\bar{I}_x - (G - R \cos \theta) \cos \theta / \sin^2 \theta &= \Phi_\varphi(\theta, z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\dot{\psi} = (G - R \cos \theta) / \sin^2 \theta = \Phi_\psi(\theta, z)$$

$$\dot{z} = \varepsilon \Phi_z(\theta, \varphi, z)$$

$$\varepsilon \Phi_v(\theta, \varphi, z) = D_0^v(\theta, z) + D_1^v(\theta, z) \sin \varphi + D_2^v(\theta, z) \cos \varphi + D_3^v(\theta, z) \sin 2\varphi + D_4^v(\theta, z) \cos 2\varphi \quad (1.4)$$

$$(v = \theta, R, G, q)$$

где ε – малый параметр, $\mathbf{z} = (R, G, q)$ – вектор медленно меняющихся функций, q – скоростной напор (динамическое давление набегающего потока), $D_i^v(\theta, z)$ – известные функции.

2. Невозмущенное движение. При $\varepsilon = 0$ система (1.3) приобретает вид:

$$\ddot{\theta} + F(\theta, z) = 0 \tag{2.1}$$

$$\dot{\phi} = R/\bar{I}_x - (G - R \cos \theta) \cos \theta / \sin^2 \theta$$

$$\dot{\psi} = (G - R \cos \theta) / \sin^2 \theta \tag{2.2}$$

$$F(\theta, z) = (R - G \cos \theta)(G - R \cos \theta) / \sin^3 \theta - (a \sin \theta + b \sin 2\theta)$$

Очевидно, что уравнение для пространственного угла атаки интегрируется независимо от двух других уравнений системы (2.1) и при известном общем решении этого уравнения два остальных уравнения интегрируются в квадратурах.

Первому уравнению системы (2.1) соответствует интеграл энергии:

$$\dot{\theta}^2/2 + W(\theta, z) = E \tag{2.3}$$

$$W(\theta, z) = \int F(\theta, z) d\theta = (G^2 + R^2 - 2GR \cos \theta) / (2 \sin^2 \theta) + a \cos \theta + b \cos^2 \theta \tag{2.4}$$

Рассмотрим случай, когда восстанавливающий момент (1.1) зависит только от синуса угла нутации ($b = 0$) и тело обладает статической устойчивостью ($a < 0$). Общее решение для угла нутации известно [3]. Воспользуемся им и запишем в виде [4, 5]:

$$\cos \theta = (u_2 - u_1) \operatorname{cn}^2[\beta t + K(k), k] + u_1 \tag{2.5}$$

$$\beta = \sqrt{-a(u_2 - u_3)/2}, \quad k = \sqrt{(u_2 - u_1)/(u_2 - u_3)}$$

где cn – эллиптический косинус Якоби; $K(k)$ – полный эллиптический интеграл 1 рода; u_1, u_2, u_3 – корни кубического уравнения относительно $u = \cos \theta$, получаемого из интеграла энергии (2.3).

С помощью (2.5) решения для углов собственного вращения и прецессии может быть найдено путем взятия квадратур [6]:

$$\phi - \phi_0 = (1/\bar{I}_x - 1)Rt + [(R + G)I_+ + (R - G)I_-]/2 \tag{2.6}$$

$$\psi - \psi_0 = (1/\bar{I}_x - 1)Rt + [(R + G)I_+ - (R - G)I_-]/2 \tag{2.7}$$

$$I_- = [\beta(u_1 - u_2)]^{-1} n_1 [\Pi(\xi, n_1, k) - \Pi(n_1, k)], \quad I_+ = [\beta(u_1 - u_2)]^{-1} n_2 [\Pi(\xi, n_2, k) - \Pi(n_2, k)]$$

$$n_1 = (u_1 - u_2)/(1 - u_1), \quad n_2 = -(u_1 - u_2)/(1 + u_1), \quad \xi = \operatorname{am}(\beta t + K, k)$$

где $\Pi(\xi, n, k)$, $\Pi(n, k)$ – неполный и полный нормальные эллиптические интегралы третьего рода.

Если форма тела соответствует бигармоническому моменту (1.1), поиск аналогичных решений (2.5)–(2.7) усложняется. Вид решения зависит от знаков коэффициентов a, b и расположения соответствующих корней u_1, u_2, u_3, u_4 . Решение для угла нутации для одного варианта знаков и расположения корней впервые было приведено в [7], а для всех возможных сочетаний было дано в [8] в виде

$$\cos \theta = L + M/[1 + N \operatorname{cn}^m(\beta t + \tau_0, k)] \tag{2.8}$$

Подробное описание значений коэффициентов, входящих в эту формулу, можно найти в [8]. Решения для углов собственного вращения и прецессии получены в работе [9].

3. Возмущенное движение осесимметричного тела. Пусть малая асимметрия отсутствуют ($\Delta\xi = 0$), а на тело действуют восстанавливающий момент (1.1) и малый диссипативный момент. Возмущенная система (1.3) примет вид

$$\ddot{\theta} + F(\theta, z) = \varepsilon\Phi_{\theta}(\theta, z), \quad \dot{z} = \varepsilon\Phi_z(\theta, z) \quad (3.1)$$

Будем считать, что коэффициенты двучлена (1.1) известные функции скоростного напора, а проекции диссипативного (демпфирующего) момента пропорциональны соответствующим проекциям одноименных угловых скоростей:

$$m_x = \lambda\kappa\omega_x, \quad m_y = \kappa\omega_y, \quad m_z = \kappa\omega_z \quad (3.2)$$

где κ – малый коэффициент, определяющий интенсивность диссипации энергии.

В возмущенной системе (1.3) быстрые и медленные переменные разделены, однако она не отвечает стандартной форме вращательной системы. Заменим уравнение для угла нутации θ , выбрав в качестве амплитуды интеграл энергии [10], предварительно записав его в виде:

$$E = (\bar{I}_x\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)/2 - \int M_{\theta}(\theta, q)d\theta \quad (3.3)$$

Дифференцируя (3.3) по времени в силу действующих возмущений, получим систему, описывающую нутационное движение:

$$\dot{z} = \varepsilon\Phi_z(\theta, z) \quad (z = E, R, G, q) \quad (3.4)$$

Применив к системе (3.4) оператор усреднения вдоль порождающего решения (2.8), можно получить усредненную систему первого приближения следующего вида [8]:

$$\dot{z} = \varepsilon\langle\Phi_z(\theta, z)\rangle = Z(\langle\cos\theta\rangle, \langle\cos^2\theta\rangle, z) \quad (3.5)$$

где $\langle\dots\rangle$ – оператор усреднения по мгновенному периоду колебаний угла нутации. Средние значения $\langle\cos\theta\rangle$, $\langle\cos^2\theta\rangle$ с помощью решения (2.8) вычисляются через полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода.

Потенциальной энергии (2.4) отвечает фазовый портрет, который может содержать, например, две особые точки типа центр и одну – типа седло. В этом случае сепаратриса разбивает фазовую плоскость на три области: внешнюю и две внутренних. Под действием возмущений в процессе эволюции системы фазовая траектория, начавшись в одной из трех областей, может продолжаться в другой, пересекая при этом сепаратрису. Это характеризуется качественным изменением характера движения, в частности разрывом огибающей угла нутации.

4. Канонические переменные действие–угол. Весьма полезные результаты можно получить, изучая невозмущенное движение, если воспользоваться переменными действие–угол. Выбирая в качестве канонических переменных углы Эйлера и соответствующие им обобщенные импульсы (p_{ψ} , p_{θ} , p_{φ}), запишем гамильтониан в виде [11]:

$$H = \frac{p_{\varphi}^2 + p_{\psi}^2 - 2p_{\varphi}p_{\psi}\cos\theta}{2A\sin^2\theta} + \frac{p_{\varphi}^2}{2C} - \frac{p_{\varphi}^2}{2A} + \frac{p_{\theta}^2}{2A} + A(a\cos\theta + b\cos^2\theta) = h \quad (4.1)$$

$$p_{\varphi} = AR, \quad p_{\psi} = AG$$

где $A = I$, $C = I_x$ – экваториальный и продольный моменты инерции тела. Введем в рассмотрение переменные действия [12]:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_{\psi} d\psi = p_{\psi}, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_{\theta} d\theta, \quad I_3 = \frac{1}{2\pi} \oint p_{\varphi} d\varphi = p_{\varphi} \quad (4.2)$$

Нумерация действий выбрана согласно последовательности эйлеровых поворотов. Переменные φ, ψ являются циклическими и соответствующие им импульсы и переменные действия являются первыми интегралами. Канонические уравнения для переменных действие-угол запишутся в виде [12]:

$$\frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w_i} = 0, \quad \frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.3)$$

Очевидно, что $I_i = \text{const}_i$, а частоты $\omega_i = \omega_i(I_i)$ являются постоянными величинами и углы определяются простыми формулами: $w_i = \omega_i t + w_{i0}$. Импульс p_θ определим из интеграла энергии (4.1), при этом сделаем замену переменных $u = \cos \theta$, тогда действие I_2 примет вид:

$$I_2 = -\frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} (1-u^2)^{-1} \sqrt{f(u)} du \quad (4.4)$$

$$f(u) = \dot{u}^2 = 2A^2 b u^4 + 2A^2 a u^3 - 2A^2 b + 2A h + \left(1 - \frac{A}{C}\right) I_3^2 u^2 - 2(A^2 a - I_1 I_3) u + \left(2A h - I_1^2 - \frac{A}{C} I_3^2\right) \quad (4.5)$$

$$u_1 = \cos \theta_{\min}, \quad u_2 = \cos \theta_{\max}$$

Интеграл (4.4) относится к классу эллиптических интегралов и, следовательно, приводится к сумме элементарных функций и трех нормальных эллиптических интегралов. Результат интегрирования зависит от типа корней полинома четвертой степени $f(u)$ и может быть получен с помощью решения (2.8). Приведем решения для случая, когда полином (4.5) имеет все действительные корни

$$I_2 = \frac{\eta}{\pi} \left[\left[h + \frac{(A^{-1} - C^{-1}) I_3^2}{2} \right] K(k) - A a [\lambda K(k) + \nu \Pi(n, k)] - \right. \\ \left. - A b \left[\left[\lambda^2 - \frac{\nu^2}{2(1+n)} K(k) + \left(\frac{\nu^2 n}{2(1+n)(k^2+n)} \right) E(k) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(\frac{\nu^2}{2} \left(\frac{n+2k^2}{k^2+n} + \frac{1}{1+n} \right) + 2\lambda \nu \right) \Pi(n, k) \right] \right] - \frac{\eta}{2A\pi} \sum_{i=1}^2 d_i [\lambda_i K(k) + (\nu_i - \lambda_i) \Pi(n_i, k)] \right]$$

$$k = [(u_3 - u_4)(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}(u_2 - u_4)^{-1}]^{1/2}, \quad n = (u_2 - u_1)/(u_1 - u_3), \quad \nu = (u_2 - u_3)$$

$$\lambda = u_3, \quad \eta = 4[-2b(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)]^{-1/2}, \quad \lambda_{1,2} = (1 \mp u_3)^{-1}, \quad \nu_{1,2} = (1 \mp u_2)^{-1}$$

$$d_{1,2} = (I_3 \mp I_1)^2/2, \quad n_{1,2} = (u_2 - u_1)(1 \mp u_3)(u_1 - u_3)^{-1}(1 \mp u_2)^{-1}$$

где $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(n, k)$ – полные эллиптические интегралы I, II и III рода. Чтобы представить гамильтониан (4.1) в переменных действия $H = H(I_1, I_2, I_3)$, необходимо выразить постоянную h через переменные действия. Действия I_1 и I_3 есть постоянные числа (см. (4.2)), а действие I_2 является функцией постоянной h и для однозначного разрешения его относительно постоянной h требуется, чтобы $\partial I_2 / \partial h \neq 0$. В работе [11] показа-

но, что эта производная строго положительна и уравнение (4.6) относительно h однозначно разрешимо. Для случая действительных корней полинома (4.5) частоты углов w_1, w_2, w_3 определяются следующими формулами:

$$\omega_1 = \frac{1}{AK(k)} \sum_{i=1}^2 d_{i+2} [\lambda_i K(k) + (v_i - \lambda_i) \Pi(n_i, K)], \quad \omega_2 = \beta \frac{\pi}{K(k)}$$

$$\omega_3 = \frac{I_3}{C} - \frac{I_3}{A} + \frac{1}{AK(k)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i d_{i+2} [\lambda_i K(k) + (v_i - \lambda_i) \Pi(n_i, k)]$$

$$d_{3,4} = (I_1 \mp I_3)/2, \quad \beta = \sqrt{-b(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)/2}$$

Аналогичные решения могут быть получены и для случая, когда полином (4.5) имеет два действительных и два комплексных корня [11].

5. Возмущенное движение тела с асимметрией. Резонансы. Возмущенное движение будем рассматривать для асимметричных тел с синусоидальной зависимостью восстанавливающего момента от угла нутации ($b = 0$ в (1.1)). Опустим в возмущенной системе (1.3) уравнение для угла прецессии ψ , поскольку правые части уравнений системы не зависят от ψ . В возмущенной системе (1.3) быстрые и медленные переменные разделены, однако она не отвечает стандартной форме вращательной системы. С помощью процедуры, предложенной в [10], заменим уравнение второго порядка для угла нутации θ двумя уравнениями первого порядка для амплитуды $x = u_1 = \cos\theta_{\max}$ и фазы y . Далее переменную φ представим в виде суммы вековой и периодической составляющей: $\varphi = \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}$. В результате получим двухчастотную систему стандартного вида [4]:

$$\dot{y} = \omega(z) + \varepsilon Y(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}(y, z), z), \quad \dot{\bar{\varphi}} = \lambda(z)$$

$$\dot{z} = \varepsilon \Phi_z(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}(y, z), z), \quad z = (x, R, G, q) \tag{5.1}$$

$$\lambda(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_\varphi(y, z) dy$$

где $\lambda(z)$ – средняя частота собственного вращения.

Для построения системы (5.1) и нахождения периодической составляющей $\tilde{\varphi}(y, z)$ использовалось решение (2.5), записанное в виде: $\cos\theta = A(x) \operatorname{cn}^2[yK/\pi + K, k] + x$ и решение для угла собственного вращения (2.6). Частоты быстрых переменных имеют вид

$$\omega = \pi\beta/(2K), \quad \lambda = (1/\bar{I}_x - 1)R + [(R + G)n_1 \Pi(n_1, k) + (R - G)n_2 \Pi(n_2, k)]/(2AK) \tag{5.2}$$

Резонанс в стандартной двухчастотной системе (5.1) возможен, когда целочисленная комбинация частоты колебания угла нутации и средней частоты собственного вращения близка к нулю

$$m\omega(z) - n\lambda(z) = O(\varepsilon) \tag{5.3}$$

где m, n – целые взаимно простые числа.

Для анализа движения в окрестности резонанса (5.3) удобно использовать систему маятникового типа [4], которая получается из (5.1) после замены $\chi = my/n - \bar{\varphi}$ и усреднения по быстрой переменной y :

$$d^2\chi/d\tau^2 + Q(\chi, z) = 0, \quad dz/d\tau = \mu f_z(\chi, z) \tag{5.4}$$

$$Q(\chi, z) = -\left(\frac{m\partial\omega}{n\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)f_z(\chi, z) = Q_0(z) + Q_1(z)\sin\chi + Q_2(z)\cos\chi + Q_3(z)\sin 2\chi + Q_4(z)\cos 2\chi \quad (5.5)$$

$$\mu = \sqrt{\varepsilon}, \quad f_z(\chi, z) = \left\langle \Phi_z\left(y, \frac{m}{n}y - \chi + \tilde{\varphi}(y, z), z\right) \right\rangle$$

где $\tau = \mu t$ – “медленное” время, $f_z(\chi, z)$ – средние по y .

Характер невозмущенного движения ($\mu = 0$) системы (5.4) зависит от вида функции (5.5), которая в свою очередь определяется соотношением (1.4) в исходной системе (1.3). Фазовый портрет системы (5.4) состоит из нескольких областей колебательного и вращательного движений, разделенных сепаратрисой. В силу малых возмущений, действующих на систему, может происходить переход из одной области в другую, а также эволюция самих областей.

При отсутствии возмущений ($\mu = 0$) система (5.4) имеет вид:

$$d^2\chi/d\tau^2 + Q(\chi, z) = 0 \quad (5.6)$$

и допускает первый интеграл – интеграл энергии

$$(d\chi/d\tau)^2/2 + W(\chi, z) = E \quad (5.7)$$

$$W(\chi, z) = \int Q(\chi, z)d\chi \quad (5.8)$$

Стационарные точки системы (5.6) являются корнями уравнения

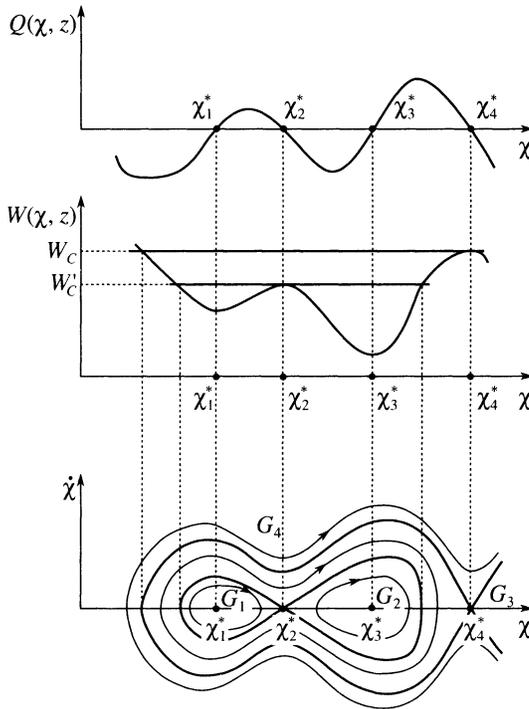
$$Q(\chi^*, z) = 0 \quad (5.9)$$

Действительные корни этого выражения существуют, если выполняется условие:

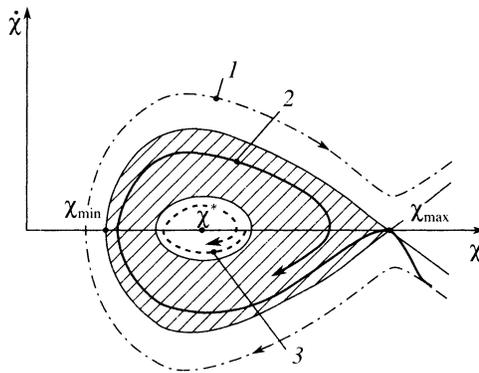
$$\max_{\chi} Q \min_{\chi} Q \leq 0 \quad (5.10)$$

В силу (5.5) может существовать четыре корня $\chi = \chi_i^*$ ($i = 1, \dots, 4$), удовлетворяющих уравнению (5.9). Устойчивое положение равновесия определяется условием $(\partial Q/\partial \chi)_{\chi = \chi_i^*} > 0$. Когда все коэффициенты $Q_i(z)$ в формуле (5.5) отличны от нуля, потенциальная энергия (5.8) может иметь вид, показанный на фиг. 3. Внешняя сепаратриса отделяет область вращательных движений G_4 от “большой” колебательной области G_3 , которая охватывает две внутренние “малые” области колебательных движений G_1 и G_2 . Точки χ_1^* и χ_3^* – точки типа центр, χ_2^* и χ_4^* – точки типа седло. Если поперечные моменты инерции равны ($I_y = I_z$), то два последних слагаемых в выражении (1.4), а следовательно и в формуле (5.5) обращаются в ноль ($Q_3 = Q_4 = 0$). В этом случае одна из областей колебательного движения (G_1 или G_2), а также стационарная седловая точка χ_2^* вырождаются.

При действия на систему (5.4) возмущений ($\mu \neq 0$) траектории на фазовом портрете изменяются, а также происходит деформация сепаратрис. Возможны три характерных типа движения: прохождение через резонанс (1), которому отвечает изменение направления вращения маятниковой системы; захват в резонанс (2), когда возможен колебательный режим движения маятника и траектории находятся внутри сепаратрисы; движение в малой окрестности стационарной точки типа центр внутри (3) сепара-



Фиг. 3



Фиг. 4

трысы (фиг. 4). Рассмотренным типам движения, внутри колебательной области, можно поставить в соответствие два вида устойчивости: устойчивость маятника в колебательной области (устойчивость резонанса) и устойчивость в малой окрестности стационарной точки типа центр (устойчивость по Ляпунову).

Понятие устойчивости резонанса используется в практических задачах, связанных со спуском космических аппаратов в атмосферу [13]. Основу анализа устойчивости движения фазовой точки в колебательной области, когда при любых малых возмущениях фазовая точка всегда остается внутри этой области, составляет весьма простое положение: величина полной энергии системы E , на любом интервале вре-

мени, не должна превышать значения потенциальной энергии W_C , вычисленной в седловой точке. Для реализации устойчивого резонанса необходимо, чтобы на фазовой плоскости существовала колебательная область, и достаточно, чтобы производная по времени полной энергии системы dE/dt была меньше, чем производная по времени потенциальной энергии dW_C/dt , вычисленной в седловой точке. В этом случае колебательная область будет расширяться быстрее, чем фазовая траектория приближаться к границе области к сепаратрисе. Производная dE/dt показывает эволюцию фазовой траектории маятниковой системы (5.4), а производная dW_C/dt – эволюцию сепаратрисы под действием малых возмущений. Поскольку речь идет о колебательном движении системы, то об указанных производных можно говорить только в смысле их средних на периоде колебаний значений. Достаточное условие устойчивости резонанса имеет вид [13]:

$$\langle dW_C/dt \rangle - \langle dE/dt \rangle > 0$$

$$\langle dW_C/dt \rangle = \oint_l (\partial W_C / \partial z) f_z(\chi, z) d\tau, \quad \langle dE/dt \rangle = \oint_l (\partial E / \partial z) f_z(\chi, z) d\tau \quad (5.11)$$

Рассмотрим устойчивость в малой окрестности стационарной точки типа центр [14]. Преобразуем систему (5.4) к виду, удобному для проведения исследования устойчивости по Ляпунову, для этого сделаем замену переменных в окрестности устойчивой стационарной точки: $\chi = \chi^* + \Delta\chi$, $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ ($\rho = \dot{\chi}$, $\rho_0 = 0$) и разложим функцию $Q(\chi, z)$ в точке $\chi = \chi^*$ в ряд Тейлора. В результате получим:

$$d\Delta\chi/d\tau = \Delta\rho + \mu G, \quad d\Delta\rho/d\tau = -\Omega^2 \Delta\chi + \mu P, \quad dz/d\tau = \mu f_z$$

$$\Omega^2 = \left. \frac{\partial Q}{\partial \chi} \right|_{\chi = \chi^*} > 0, \quad G = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} / \frac{\partial Q}{\partial \chi} \right)_{\chi = \chi^*} f_z(\chi^*, z) \quad (5.12)$$

где P – функция, определяющая нелинейные члены разложения по переменной $\Delta\chi$.

Для построения функции Ляпунова в квазилинейной системе (5.12) удобно перейти к переменным амплитуда-фаза: $\Delta\chi = A \cos \psi$, $\Delta\rho = -A\Omega \sin \psi$. После чего система (5.12) примет вид

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \Omega - \frac{\Omega'}{\Omega} \sin \psi \cos \psi + \mu \left(-\frac{P}{A\Omega} \cos \psi - \frac{G}{A} \sin \psi \right)$$

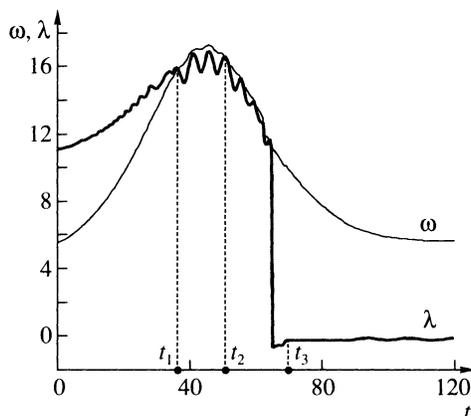
$$\frac{dA}{d\tau} = -A \frac{\Omega'}{\Omega} \sin^2 \psi + \mu \left(-\frac{P}{\Omega} \sin \psi + G \cos \psi \right), \quad \frac{dz}{d\tau} = \mu f_z \quad (5.13)$$

где $\Omega' = d\Omega/d\tau$ – имеет порядок малости μ .

В качестве функции Ляпунова выбирается квадратичная форма амплитуды колебаний: $V = A^2 = (\Delta\chi)^2 + (\Delta\rho)^2/\Omega^2$. Эта функция является положительно-определенной и допускает по переменным $\Delta\chi$ и $\Delta\rho$ бесконечно-малый высший предел и удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.1 из [15], согласно которой для устойчивости движения системы (5.11) в окрестности точки $\Delta\chi = 0$, $\Delta\rho = 0$ при действии возмущений достаточно потребовать выполнения следующего условия

$$A \langle dA/d\tau \rangle < 0 \quad (5.14)$$

Разложение функций P и G в ряд Тейлора в окрестности точки $\Delta\chi = 0$ и усреднение второго уравнения системы (5.11) по переменной ψ позволяет переписать достаточное условие устойчивости (5.14) с точностью до членов порядка малости μ^2 в виде $\Omega'/\Omega > 0$.



Фиг. 5

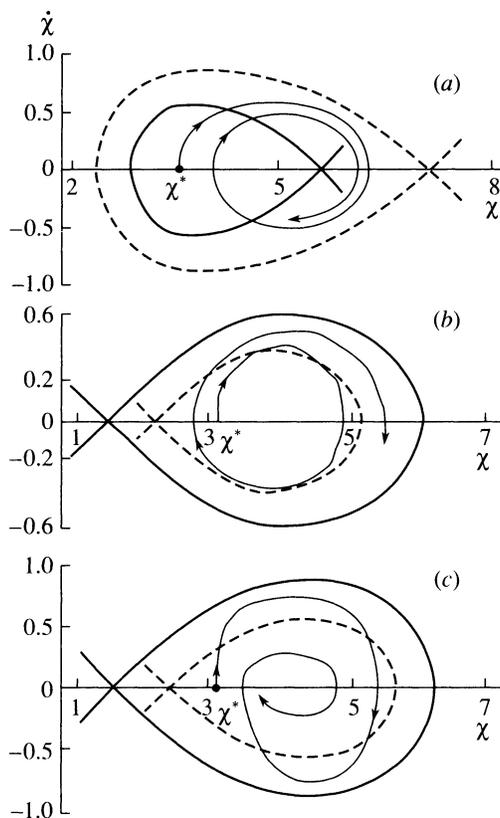
Выполняя соответствующие вычисления, можно записать окончательную форму достаточного условия устойчивости движения в окрестности стационарной точки в виде [14]:

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial z} - \frac{\partial^2 Q \partial Q / \partial z}{\partial \chi^2 \partial Q / \partial \chi} \right)_{\chi = \chi^*} f_z(\chi^*, z) > 0 \quad (5.15)$$

Следует отметить, что необходимые (5.10) и достаточные (5.11) условия устойчивости резонанса, а также достаточные условия устойчивости движения в окрестности стационарной точки (5.15) получены для общего нелинейного случая движения тела в сопротивляющейся среде и для любого типа резонанса (5.3). В [14] и [16] показано, что из условий (5.10) и (5.15) вытекают аналогичные условия, полученные другими авторами для более простых квазилинейных математических моделей движения тела.

6. Пример. На фиг. 5 показано изменение частот колебаний $\omega(z)$ и $\lambda(z)$ от времени t , для тела со следующими характеристиками: $m = 200$ кг, $I_x/I = 0.4$, $\bar{z}_c = 0.002$. При начальных условиях: $\theta_0 = 47^\circ$, $\varphi_0 = 0^\circ$, $R_0 = 4.18 \text{ c}^{-1}$, $G_0 = 2.96 \text{ c}^{-1}$.

В окрестности точек t_1, t_2 (резонанс $m = n = 1$) и t_3 (резонанс $m = 0, n = 1$) тело захватывается в резонанс. Фазовые траектории, а также начальное и конечное положения сепаратрисы для всех трех резонансов показаны соответственно на фиг. 6, *a, b, c*. На этой фигуре тонкой сплошной линией изображена фазовая траектория. Толстой штриховой линией показано положение сепаратрисы в начальный момент времени, соответствующий захвату в резонанс. Толстой сплошной линией изображено конечное положение сепаратрисы. В моменты времени t_1, t_2 , и t_3 вычислялось достаточное условие устойчивости резонанса (5.11) и достаточное условие устойчивости по Ляпунову (5.15). В точке t_1 достаточное условие устойчивости (5.15) является истинным, однако не выполняется соотношение (5.11). Это означает, что с течением времени колебательная область сжимается, и фазовая траектория “выталкивается” во вращательную область (фиг. 6, *a*). В момент времени t_2 достаточное условие (5.15) не выполняется, а неравенство (5.11) является истинным. Как видно из фиг. 6, *b, c* с течением времени фазовая траектория покидает малую окрестность стационарной точки типа центр, но остается внутри сепаратрисы в пределах области колебательного движения. В точке t_3 одновременно выполняется и неравенство (5.11) и достаточное условие (5.15), хотя меняется тип резонанса ($m = 0, n = 1$). Это означает, что колеба-



Фиг. 6

тельная область расширяется, а фазовая траектория попадает в малую окрестность стационарной точки типа центр.

Численные расчеты показывают, что при анализе нелинейных резонансов следует проводить исследование устойчивости как самого резонанса, так и устойчивости по Ляпунову в окрестности стационарной точки, поскольку из устойчивости резонанса не следует устойчивости по Ляпунову и наоборот.

Важно отметить, что исследование возмущенного движения твердого тела под действием восстанавливающего момента остается весьма актуальной темой, что, например, отражается новыми публикациями [17].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00151).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
2. Аэродинамика ракет / Под ред. Краснова Н.Ф. М.: Высшая шк., 1968. 772 с.
3. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1944. 655 с.
4. Асланов В.С. Нелинейные резонансы при неуправляемом спуске в атмосфере асимметричных КА // Космич. исследования. 1992. Т. 30. № 5. С. 608–614.
5. Асланов В.С. О вращательном движении баллистического осесимметричного аппарата при спуске в атмосфере // Космич. исследования. 1976. Т. 14. № 4. С. 491–497.

6. *Асланов В.С.* Определение амплитуды пространственных колебаний баллистического аппарата с малой асимметрией при спуске в атмосфере // *Космич. исследования.* 1980. Т. 18. № 2. С. 178–184.
7. *Асланов В.С., Бойко В.В.* Нелинейное резонансное движение асимметричного космического аппарата в атмосфере // *Космич. исследования.* 1985. Т. 23. № 3. С. 408–415.
8. *Асланов В.С., Серов В.М.* Вращательное движение осесимметричного твердого тела с би-гармонической характеристикой восстанавливающего момента // *Изв. РАН. МТТ.* 1995. № 3. С. 19–25.
9. *Серов В.М.* Вращательное движение динамически симметричного твердого тела под действием нелинейного момента // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1991. № 5. С. 26–31.
10. *Волосов В.М.* Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанных с усреднением // *Ж. вычисл. математики и мат. физики.* 1963. Т. 3. № 1. С. 3–53.
11. *Асланов В.С., Тимбай И.А.* Движение твердого тела в обобщенном случае Лагранжа. Самара: Изд-во СГАУ, 2001. 58 с.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 215 с.
13. *Асланов В.С., Мясников С.В.* Устойчивость нелинейных резонансных режимов движения космического аппарата в атмосфере // *Космич. исследования.* 1996. Т. 34. № 6. С. 626–632.
14. *Асланов В.С., Мясников С.В.* Анализ нелинейных резонансов при спуске космического аппарата в атмосферу // *Космич. исследования.* 1997. Т. 35. № 6. С. 659–665.
15. *Хапаев М.М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высш. шк., 1988. 184 с.
16. *Асланов В.С.* Два вида нелинейного резонансного движения асимметричного КА в атмосфере // *Космич. исследования.* 1988. Т. 26. № 2. С. 220–226.
17. *Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Леценко Д.Д.* Возмущенные вращательные движения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации // *Механика твердого тела.* Донецк: Институт прикл. мат. и мех. НАН Украины, 2001. Вып. 31. С. 57–62.

Самара

Поступила в редакцию
8.04.2003