

УДК 2.178.80

В. С. Асланов, И. А. Тимбай, В. В. Бойко

**ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ОСЕСИММЕТРИЧНОГО АППАРАТА
НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ УГЛАХ АТАКИ ПРИ СНИЖЕНИИ
В АТМОСФЕРЕ ПЛАНЕТЫ**

Рассматриваются колебания осесимметричного КА при спуске в атмосфере планеты при произвольных углах атаки. Методом Волосова для КА произвольной осесимметричной конфигурации получены осредненные уравнения движения в интегро-дифференциальной форме. При условии, что коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента представляется почти синусоидальной зависимостью от угла атаки, эти уравнения сведены к обыкновенным дифференциальным. На основании численных расчетов показано, что полученные уравнения применимы и при существенном отличии коэффициента восстанавливающего момента от синуса угла атаки. Найдена приближенная формула, определяющая амплитуду колебания угла атаки в случае движения близкого к плоскому.

1. Движение осесимметричного КА описывается уравнениями [1]

$$\ddot{\alpha} + \frac{(G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} - M_\alpha(\alpha) = -f_z(\alpha) \dot{\alpha}, \quad \dot{R} = -f_x R,$$

$$\dot{G} = -f_y(\alpha) G - \left[(f_x - f_y(\alpha)) \cos \alpha - \frac{Y(\alpha) \sin \alpha}{mV} \right] R, \quad \dot{V} = -c_x(\alpha) \frac{qS}{m} - g_\tau \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g_\tau \cos \theta}{V} \left(1 - \frac{V^2}{g_\tau R_p} \right); \quad \dot{H} = V \sin \theta. \quad (1)$$

Здесь α — пространственный угол атаки, $M_x(\alpha)$ — восстанавливающий момент, $R = Q_x/I$, $G = Q_v/I$; Q_x , Q_v — проекции вектора кинетического момента на продольную ось КА и вектор скорости \mathbf{v} ; θ , H — соответственно угол наклона траектории к горизонту и высота; g_τ — ускорение силы тяжести, R_p — расстояние до притягивающего центра, c_x — коэффициент сопротивления, q — скоростной напор, $Y = c_y qS$ — подъемная сила, m — масса КА, S — площадь миделевого сечения,

$$f_x = -m_{x_n}^{\bar{\omega}_x} \frac{qSl^2}{VI_x} \cdot f_y(\alpha) = \left[-m_{y_n}^{\bar{\omega}_y}(\alpha) + \frac{c_y(\alpha) I \cos \alpha}{ml^2 \sin \alpha} \right] \frac{qSl^2}{VI},$$

$$f_z(\alpha) = \left[-m_{z_n}^{\bar{\omega}_z}(\alpha) + \frac{c_y^\alpha(\alpha) I}{ml^2} \right] \frac{qsl^2}{VI},$$

где l — характерный размер КА, I_x — осевой момент инерции, I — экваториальный момент инерции; $m_{x_n}^{\bar{\omega}_x}$, $m_{y_n}^{\bar{\omega}_y}$, $m_{z_n}^{\bar{\omega}_z}$ — коэффициенты проекций демпфирующего момента на оси связанной с пространственным углом атаки системы координат $Ox_n y_n z_n$ (ось Ox_n совпадает с осью симметрии, ось Oz_n нормальна плоскости угла атаки и ось Oy_n лежит в плоскости угла атаки).

При $\mu = 2Q_0/\lambda V_0 |\sin \theta_0| \gg 1$ [2] уравнения 1 можно записать в виде

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha, z) = \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z), \quad \dot{z} = \varepsilon \Phi_z(\alpha, z),$$

где $z = \{R, G, V, \theta, H\}$, $\Phi_z = \{\Phi_R, \Phi_G, \Phi_V, \Phi_\theta, \Phi_H\}$, ε — малый параметр.

Для осесимметричных тел коэффициенты поперечного аэродинамического момента относительно передней кромки, нормальной и тангенциальной сил могут быть представлены в виде

$$m_p = \sin \alpha \sum_{i=0}^n a_{mi} \cos i\alpha, \tag{2}$$

$$c_N = \sin \alpha \sum_{i=0}^n a_{ni} \cos i\alpha, \quad c_\tau = a_\tau + \cos \alpha \sum_{i=0}^n a_{\tau i} \cos i\alpha.$$

Из соотношений (2) следует формула для восстанавливающего момента

$$M_\alpha(\alpha) = -\frac{qSl}{l} \sin \alpha \sum_{i=0}^n (a_{mi} - \bar{x}_\tau a_{ni}) \cos i\alpha = -q \sin \alpha \sum_{i=0}^n c_i \cos^i \alpha, \tag{3}$$

где $\bar{x}_\tau = x_\tau/l$ — безразмерное смещение центра масс от передней кромки.

При $\varepsilon = 0$ система (1) сводится к одному уравнению вида

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) = 0, \tag{4}$$

$$F(\alpha) = \frac{(G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + q \sin \alpha \sum_{i=0}^n c_i \cos^i \alpha, \tag{5}$$

из которого следует интеграл энергии

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + W(\alpha) = E, \tag{6}$$

$$W(\alpha) = \int F(\alpha) d\alpha = \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - q \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{i+1} \cos^{i+1} \alpha. \tag{7}$$

Уравнение (4) описывает колебательный процесс, причем колебания происходят в пределах $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1$. Общее решение порождающего уравнения (4) при $M_\alpha = qc_0 \sin \alpha$ приведено, например, в [3].

Используя (4)–(7), перейдем от исходной системы (1) к системе осредненных уравнений для амплитудных кривых $\alpha_1(\varepsilon t)$, $\alpha_2(\varepsilon t)$ записанных в форме Волосова [4]

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 = & \frac{\varepsilon}{F(\alpha_1)} \left\{ \frac{1}{T} \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi_\alpha(\alpha, -\dot{\alpha}) d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}) d\alpha + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial W(\alpha)}{\partial z} \Phi_z(\alpha, -\dot{\alpha}) \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\partial W(\alpha)}{\partial z} \Phi_z(\alpha, \dot{\alpha}) \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial W(\alpha_1)}{\partial z} \bar{\Phi}_z \right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\dot{z} = \frac{\varepsilon}{T} \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi_z(\alpha, -\dot{\alpha}) \frac{d\alpha}{-\dot{\alpha}} + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \Phi_z(\alpha, \dot{\alpha}) \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} \right] = \varepsilon \bar{\Phi}_z,$$

где $\dot{\alpha} = \pm \sqrt{2[E - W(\alpha)]}$, $E = W(\alpha_1) = W(\alpha_2)$.

Период колебаний T и минимальный угол атаки α_2 определяются формулами

$$T = 2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \{2[E - W(\alpha)]\}^{-1/2} d\alpha, \quad (9)$$

$$W(\alpha_1) - W(\alpha_2) = 0. \quad (10)$$

Уравнения (8)–(10) записаны в явном виде с помощью известных функций Φ_α , Φ_z и W . Для построения этих уравнений не требуется общего решения порождающего уравнения (4). Определенные интегралы в правых частях уравнений (8) зависят только от косинуса «быстрой» переменной α . Поэтому целесообразно исключить из квадратур эту тригонометрическую функцию, перейдя к новой переменной $x = \cos \alpha$. Учитывая, что согласно (1) функция $\Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha})$ линейна по $\dot{\alpha}$ и функции $\Phi_z(\alpha)$ не зависят от $\dot{\alpha}$, можно существенно упростить уравнения (8) и представить их в виде

$$\dot{x}_1 = -\frac{\varepsilon \sqrt{1-x_1^2}}{F(x_1)} \left[\frac{2}{T} \int_{x_1}^{x_2} \left(\Phi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\Phi_z}{\sqrt{2(E-W)}} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\partial W(x_1)}{\partial z} \bar{\Phi}_z \right], \quad (11)$$

$$\dot{z} = \frac{2\varepsilon}{T} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Phi_z dx}{\sqrt{2(E-W)}(1-x^2)} = \bar{\Phi}_z, \quad T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E-W)}(1-x^2)},$$

где $x_1 = \cos \alpha_1$, $x_2 = \cos \alpha_2$, $\Phi_z = \{\Phi_R, \Phi_G, \Phi_q\}$, $\Phi_q = \dot{q}$.

Уравнения (11) получены без введения ограничений на параметры движения около центра масс и аэродинамические характеристики КА. Как будет показано ниже, при $\mu \gg 1$ результаты расчета по исходным уравнениям (1) и осредненным (11) совпадают.

2. Осредненные уравнения (11) содержат в правых частях довольно сложные квадратуры, которые в некоторых случаях могут быть приведены к полным эллиптическим интегралам.

Пусть коэффициенты многочленов (2) удовлетворяют условиям

$$\left| \frac{a_{mi}}{a_{m0}} \right| = 0(\varepsilon), \quad \left| \frac{a_{ni}}{a_{n0}} \right| = 0(\varepsilon) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Отсюда следует, что

$$\left| \frac{c_i}{c_0} \right| = 0(\varepsilon) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

Исходные уравнения движения (1) представим в виде

$$\ddot{\alpha} + F^*(\alpha) = \varepsilon \Phi_\alpha^*(\alpha, \dot{\alpha}, z), \quad \dot{z} = \varepsilon \Phi_z(\alpha, z), \quad (13)$$

где
$$F^*(\alpha) = \frac{(G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + q c_0 \sin \alpha,$$

$$\Phi_\alpha^*(\alpha, \dot{\alpha}, z) = \Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z) - q \sin \alpha \sum_{i=1}^n c_i \cos^i \alpha.$$

При выводе осредненных уравнений ограничимся тремя гармониками разложения коэффициентов аэродинамических сил $c_N(\alpha)$, $c_T(\alpha)$ и восстанавливающего момента $m_\alpha(\alpha)$. В силу уравнений (1) функции Φ_R , Φ_G , Φ_H зависят только от «медленных» переменных z , а функции Φ_α^* , Φ_G и

Φ_V могут быть представлены следующим образом

$$\Phi_{\alpha^*}(\alpha, \dot{\alpha}) = -\dot{\alpha} \sum_{i=0}^4 S_{\alpha_i} \cos^i \alpha - q \sin \alpha \sum_{i=1}^2 c_i \cos^i \alpha, \quad (14)$$

$$\Phi_G(\alpha) = \sum_{i=0}^4 S_{G_i} \cos^i \alpha, \quad \Phi_V(\alpha) = \sum_{i=0}^4 S_{V_i} \cos^i \alpha.$$

При $\varepsilon=0$ система уравнений (13) переходит в уравнение

$$\ddot{\alpha} + \frac{(G-R \cos \alpha)(R-G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + qc_0 \sin \alpha = 0,$$

решение которого имеет вид [5]

$$\cos \alpha = A \operatorname{cn}^2[\beta(t-t_0) + K; k] + x_1. \quad (15)$$

Здесь cn — эллиптический косинус, $k = \sqrt{A/2\eta}$ — модуль эллиптических функций, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\beta = \sqrt{qc_0\eta}$, x_1 и t_0 — произвольные постоянные, $A = x_2 - x_1$,

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{2(ax_1 - b)}{1 - x_1^2} + \left[\frac{a - bx_1}{1 - x_1^2} \right]^2}, \quad \cos d_{\min} = x_2 = \eta - \frac{a - bx_1}{1 - x_1^2},$$

$$a = \frac{R^2 + G^2}{4qc_0}, \quad b = \frac{RG}{2qc_0}.$$

При известном порождающем решении удобно вместо независимой переменной α в квадратурах осредненных уравнений (II) перейти к независимой переменной t . Тогда для системы (13) с учетом (14) осредненные уравнения могут быть записаны в виде

$$\dot{x}_1 = -\frac{\varepsilon \sqrt{1-x_1^2}}{F^*(x_1)} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \left(\Phi_{\alpha^*} \dot{\alpha} + \frac{\partial W^*}{\partial R} \Phi_R + \frac{\partial W^*}{\partial G} \Phi_G + \frac{\partial W^*}{\partial q} \Phi_q \right) dt - \right. \\ \left. - \frac{\partial W^*(x_1)}{\partial R} \bar{\Phi}_R - \frac{\partial W^*(x_1)}{\partial G} \bar{\Phi}_G - \frac{\partial W^*(x_1)}{\partial q} \bar{\Phi}_q \right], \quad (16)$$

$$\dot{R} = \varepsilon \Phi_R(z), \quad \dot{G} = \varepsilon \sum_{i=0}^4 \frac{S_{G_i}}{T} \int_0^T \cos^i \alpha dt = \varepsilon \Phi_G(z),$$

$$\dot{V} = \varepsilon \sum_{i=0}^4 \frac{S_{V_i}}{T} \int_0^T \cos^i \alpha dt = \varepsilon \bar{\Phi}_V(z), \quad \dot{\theta} = \varepsilon \bar{\Phi}_{\theta}(z), \quad \dot{H} = \varepsilon \Phi_H,$$

где $T = 2K/\beta$ — период колебания

$$W^*(\alpha) = \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - qc_0 \cos \alpha.$$

Подставляя решение (15) в уравнения (16) и вычисляя квадратуры, получим

$$\dot{x}_1 = -\frac{\varepsilon \sqrt{1-x_1^2}}{F^*(x_1)} \left(L_{\alpha} + L_R - \frac{\partial W^*(x_1)}{\partial R} \bar{\Phi}_R + \right. \\ \left. + L_G - \frac{\partial W^*(x_1)}{\partial G} \bar{\Phi}_G + L_q - \frac{\partial W^*(x_1)}{\partial q} \bar{\Phi}_q \right) \quad (17)$$

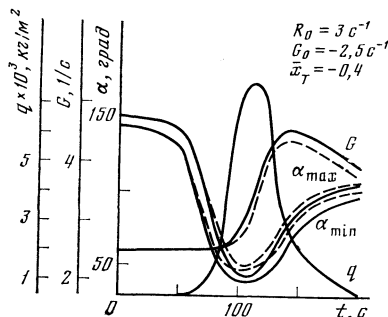


Рис. 1

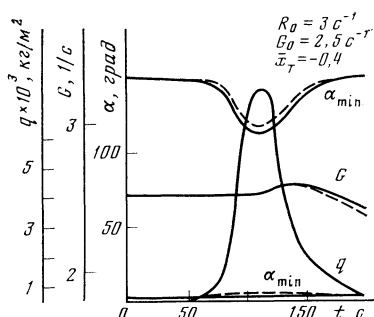


Рис. 2

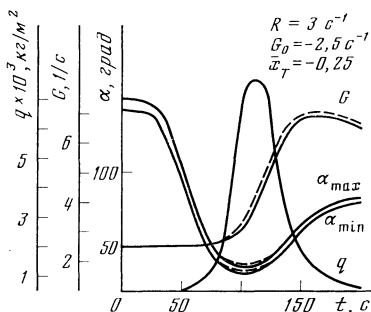


Рис. 3

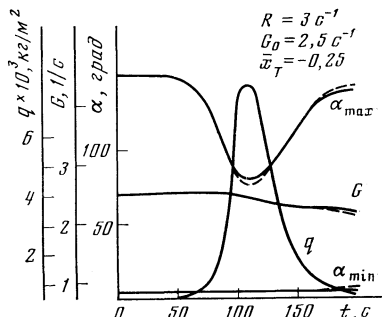


Рис. 4

$$\dot{R} = \varepsilon \Phi_R, \quad \dot{G} = \varepsilon \sum_{i=0}^4 S_{G_i} N_i = \varepsilon \bar{\Phi}_G,$$

$$\dot{V} = \varepsilon \sum_{i=0}^4 S_{V_i} N_i = \varepsilon \bar{\Phi}_V, \quad \dot{\theta} = \varepsilon \Phi_\theta, \quad \dot{H} = \varepsilon \Phi_H.$$

Здесь

$$L_a = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_a^* \dot{\alpha} dt = -\frac{1}{T} \left\{ (S_{\alpha_0} + S_{\alpha_1} x_1) I_g + 4\beta A^2 \left[S_{\alpha_1} (d_1 K + d_2 E + d_3 \Pi_1 + d_4 \Pi_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{i=0}^2 A^i \mu_i (k'^2 H_{2i+2} + (2k^2 - 1) H_{2i+4} - k^2 H_{2i+6}) \right] \right\},$$

$$L_R = \frac{\Phi_R}{T} \int_0^T \frac{\partial W^*}{\partial R} dt = \frac{\Phi_R}{2AK} [n_1 \Pi_1 (R - G) - n_2 \Pi_2 (R + G)],$$

$$L_G = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_G \frac{\partial W^*}{\partial G} dt = \frac{1}{2AK} [n_1 \Pi_1 (\gamma_0 + \gamma_1) - n_2 \Pi_2 (\gamma_0 - \gamma_1)] + \sum_{i=0}^3 \gamma_{i+2} N_i,$$

$$L_q = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_q \frac{\partial W^*}{\partial q} dt = -c_0 V \left(\frac{V}{2} \frac{\partial \rho}{\partial H} \Phi_H N_1 + \rho \sum_{i=0}^5 S_{V_i} N_i \right),$$

$$I_g = \int_0^T \alpha^2 dt = 2\beta (a_{11} K + a_{12} E + a_{13} \Pi_1 + a_{14} \Pi_2),$$

$$N_i = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^i \alpha dt = A^i \left(\frac{1}{T} \int_0^T \text{cn}^{2i} u dt \right) + \binom{i}{1} A^{i-1} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \text{cn}^{2i-2} u dt \right) x_1 +$$

$$+ \dots + x_1^i = A^i H_{2i} + \binom{i}{1} A^{i-1} H_{2i-2} x_1 + \dots + x_1^i,$$

$$H_{2i} = [(2i-2)(2k^2-1)H_{2i-2} + (2i-3)k'^2 H_{2i-4}] \frac{1}{(2i-1)k^2} \quad (i=2, 3, \dots),$$

$$H_0 = 1, \quad H_1 = \frac{1}{k^2 K} (E - k'^2 K),$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль, $E(k)$, $\Pi(k, n)$ — полные эллиптические интегралы второго и третьего рода, $\Pi_1 = \Pi(k, n_1)$, $\Pi_2 = \Pi(k, n_2)$, $n_1 = A/(1-x_2)$, $n_2 = -A/(1+x_2)$;

$$a_{11} = 4k^2 \left(1 + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right), \quad a_{12} = 4, \quad a_{13} = -2(1-x) \left(1 + \frac{k^2}{n_1} \right),$$

$$a_{14} = -2(1+x) \left(1 + \frac{k^2}{n_2} \right);$$

$$d_1 = -k^2[(1-a)a^2 - (1+b)b^2] - (a+b)k'^2/3k^2, \quad d_2 = (a^2 - b^2) - (a+b)(1-2k^2)/3k^2,$$

$$d_3 = -a^2(k'^2 + ak^2), \quad d_4 = b^2(k'^2 - bk^2); \quad a = (1-x_1)/A, \quad b = (1+x_1)/A;$$

$$\mu_0 = \sum_{i=0}^2 S_{\alpha(i+2)} x_1^i, \quad \mu_1 = S_{\alpha_3} + 2S_{\alpha_4} x_1, \quad \mu_2 = S_{\alpha_4};$$

$$\gamma_0 = \kappa_1 G - \kappa_2 R, \quad \gamma_1 = \kappa_2 G - \kappa_1 R, \quad \gamma_2 = \kappa_2 R - \kappa_3 G, \quad \gamma_3 = \kappa_3 R - S_{G_3} G,$$

$$\gamma_4 = S_{G_3} R - S_{G_4} G, \quad \gamma_5 = S_{G_4} R; \quad \kappa_1 = \sum_{i=0}^2 S_{G(2i)}, \quad \kappa_2 = S_{G_1} - S_{G_2}, \quad \kappa_3 = S_{G_2} + S_{G_4}.$$

Полученные осредненные уравнения отличаются от осредненных уравнений (11) тем, что квадратуры в правых частях этих уравнений сведены к полным эллиптическим интегралам первого, второго и третьего рода.

Система осредненных уравнений (17) получена для первых трех гармоник разложения коэффициентов аэродинамических сил и моментов. С ростом числа гармоник увеличивается степень многочленов относительно $\cos \alpha$ в квадратурах правых частей уравнений (16). Структура интегралов при этом не изменяется, и принципиальные трудности в вычислении квадратур не возникают. Следовательно, для произвольного количества гармоник разложения аэродинамических характеристик могут быть получены осредненные уравнения, аналогичные (17).

С целью сравнения исходных (1) и осредненных (11), (17) уравнений движения была проведена серия расчетов для различных осесимметричных КА. Параметры КА: $\bar{I}_x/I = 0,6$; $\sigma_{x_0} = \frac{c_{x_0} S}{2m} = 0,001 \text{ м}^2/\text{кг}$; $m_{x_n} \bar{\omega}_x = m_{y_n} \bar{\omega}_y = m_{z_n} \bar{\omega}_z = 0$; $\bar{x}_{r_1} = -0,4 (c_0 = 0,01, c_1 = -0,008, c_2 = 0,024)$, $\bar{x}_{r_2} = -0,25 (c_0 = 0,049, c_1 = -0,023, c_2 = 0,019)$.

Сплошной линией на рис. 1–4 показаны результаты расчетов по системам (1) и (11) (совпадают), штриховой — по уравнениям (17). Затраты машинного времени на получение одного варианта решения при интегрировании осредненных уравнений (11) в 6–8 раз меньше, а при интегрировании уравнений (17) — в 30–50 раз меньше, чем при интегрировании исходных уравнений. Приведенные расчеты показывают, что для различ-

ного по характеру движения КА относительно центра масс при существенно немалом отношении (12) осредненные уравнения (17) дают достаточное для практических целей совпадение с точным решением.

3. Не вводя ограничения на величину угла атаки, найдем оценку для амплитуды колебания α_{\max} при движении КА близкого к плоскому. Пусть $m_\alpha \sim \sin \alpha$ и аэродинамическое демпфирование отсутствует. Интеграл действия в этом случае не изменяет своего значения при спуске КА в атмосфере и является интегралом осредненных уравнений.

Интеграл действия определяется формулой [5]

$$I_g = 2\beta(a_{11}K + a_{12}E + a_{13}\Pi_1 + a_{14}\Pi_2), \quad (18)$$

где

$$a_{11} = 4k^2 \left(1 + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right), \quad a_{12} = 4, \quad a_{13} = -2(1-x_1) \left(1 + \frac{k^2}{n_1} \right) \\ a_{14} = -2(1+x_2) \left(1 + \frac{k^2}{n_2} \right)$$

Для случая, когда

$$\alpha_{\min}/\alpha_{\max} \leq 0,1 \quad (19)$$

с точностью 1–2% В. А. Ярошевским [2] получено приближенное выражение для интеграла (18) в виде

$$I_g = 8\beta(E - k'^2K) - \pi|R - G|, \quad (20)$$

где $k = \sin \frac{\alpha_{\max}}{2}$ – модуль. Вводя обозначение $D = I_g + \pi/(R - G)/8\beta$, согласно (20) и свойству эллиптических интегралов имеем

$$D = E - k'^2K \leq 1. \quad (21)$$

Полные эллиптические интегралы первого и второго рода разлагаются в степенные ряды по степеням k^2 :

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \dots \right], \\ E(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots \right].$$

Подставим эти выражения в формулу (21)

$$D = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} k^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{k^4}{4} + \dots + \left[\frac{1 \cdot 3 \dots (2i-3)}{2 \cdot 4 \dots (2i-2)} \right]^2 \frac{k^{2i}}{2i} + \dots \right\}$$

и произведем обращение полученного степенного ряда. В результате имеем зависимость амплитуды колебания угла атаки от параметров движения

$$\alpha_{\max} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{4}{\pi} D - \frac{2}{\pi^2} D^2 - \frac{1}{\pi^3} D^3 - \frac{5}{2\pi^4} D^4 - \dots} \quad (22)$$

Ряд, стоящий под корнем, сходится достаточно быстро, так как $D \leq 1$ формула (22) получена без учета аэродинамического демпфирования и поэтому дает верхнюю оценку точного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузмак Г. Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970.
2. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978.
3. *Мак-Миллан В. Д.* Динамика твердого тела. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
4. *Волосов В. М.* Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанных с усреднением.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1, с. 3–51.
5. *Асланов В. С.* О вращательном движении баллистического осесимметричного аппарата при спуске в атмосфере.— Космич. исслед., 1976, т. 14, № 4, с. 491–497.

Поступила в редакцию
30.IV.1980